

פתרון תרגיל מס' 2

(1)

$$P(\phi) = \{\phi\}$$

$$P(P(\phi)) = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$P(P(P(\phi))) = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

(2)

$B = \phi$ או $A = \phi$ או $A = B \Leftrightarrow A \times B = B \times A$.
 $\Leftarrow$ אם $A = \phi$ או $B = \phi$ סיימנו. אחרת, יהי $x \in A$, קיים $y \in B$ כך ש: $(x, y) \in A \times B = B \times A$.
 לכן $x \in B$ ולכן $A \subseteq B$. ההוכחה עבור $B \subseteq A$ זהה.
 $\Rightarrow$ אם $A = \phi$ או $B = \phi$ הטענה ברורה (לכל קבוצה C מתקיים $C \times \phi = \phi \times C = \phi$). אם $A = B$ אז הטענה טריוויאלית.

(3) א.

$nZ \subseteq mZ$, בפרט עבור $z = 1$, ולכן מתקיים $n \in mZ$ כלומר קיים $z_1 \in Z$ כך ש: $n = mz_1$ לכן $m | n$.
 אם $m | n$ אז קיים $z_1 \in Z$ כך ש: $n = mz_1$ לכן $n \in mZ$ ולכן לכל $z \in Z$, $nz \in mZz = mZ$, כלומר: $nZ \subseteq mZ$.

ב.

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} nZ = \phi$$

(4) א.

$$P(A) \times P(B) = \{(\phi, \phi), (\phi, \{2\}), (\{1\}, \phi), (\{1\}, \{2\})\}$$

ב.

$$P(A \times B) = \{\phi, \{(1, 2)\}\}$$

(5) א. יחס שקילות. החלוקה המושרית: $[1] = [3] = \{1, 3\}$, $[2] = \{2\}$, $[4] = \{4\}$.
 ב. אינו יחס שקילות.

(6) א. לא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, לא סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

ב. רפלקסיבי, לא אנטי רפלקסיבי, לא סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

ג. רפלקסיבי, לא אנטי רפלקסיבי, סימטרי, לא אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

מחלקות השקילות: $[1] = \{2n - 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $[2] = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

ד. רפלקסיבי, לא אנטי רפלקסיבי, לא סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי.

ה. לא רפלקסיבי, לא אנטי רפלקסיבי, (לדוגמא: $(\phi, \phi) \in R_5$), סימטרי, לא אנטי סימטרי, לאטרנזיטיבי, (לדוג': $A = \{1\}, B = \{2\}$. $(A, B) \in R_5$ אבל $(B, A) \notin R_5$).

הערה להמשך התרגיל: כשיסומן: $x \in A, B$, הכוונה ל: $x \in A$ וגם $x \in B$.

- (7) א. נכון. יהי $a \in A$, מתקיים: $(a, a) \in R, S$ לכן: $(a, a) \in R \cap S$.
 ב. נכון. לכל $a \in A$, $(a, a) \notin R, S$ לכן: $(a, a) \notin R \cup S$ ולכן: $(a, a) \notin R \cap S$.
 ג. נכון. יהי $(a, b) \in S \cap R \Leftrightarrow (a, b) \in S$ וגם $(a, b) \in R$.
 ד. נכון. יהיו $(b, a), (a, b) \in S \cap R \Leftrightarrow (b, a), (a, b) \in S, R \Leftrightarrow a = b$.
 ה. נכון. יהיו $(a, b), (b, c) \in R \cap S \Leftrightarrow (a, b), (b, c) \in R, S \Leftrightarrow (a, c) \in R, S \Leftrightarrow (a, c) \in R \cap S$.
 ו. נכון. כמו א'.
 ז. נכון. כמו ב'.
 ח. נכון. יהי $(a, b) \in S \cup R$ אזי $(a, b) \in S$ או $(a, b) \in R$ או $(b, a) \in S$ או $(b, a) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in S \cup R$.
 ט. לא נכון. $R = \{(1, 2)\}$ $S = \{(2, 1)\}$.
 י. לא נכון. $R = \{(1, 2)\}$ $S = \{(2, 1)\}$.
 יא. לא נכון. ראו סעיף י.

$$(8) \quad R \cap S \text{ יח"ש: רפלקסיביות מוכח ב-7א, סימטריות ב-7ג וטרנזיטיביות ב-7ה.}$$

$$(9) \quad E_2 \cap E_3 = E_6$$

$$[1]_2 = \{\dots, -3, -1, 1, 3, \dots\}, [0]_2 = \{\dots, -2, 0, 2, \dots\} : E_2 \text{ מחלקות שקילות}$$

$$[1]_3 = \{\dots, -2, 1, 4, \dots\}, [0]_3 = \{\dots, -3, 0, 3, \dots\} : E_3 \text{ מחלקות שקילות}$$

$$[2]_3 = \{\dots, -1, 2, 5, \dots\}$$

$$[1]_2 \cap [1]_3 = \{\dots, -5, 1, 7, \dots\} = [1]_6 \text{ לדוגמא:}$$

$$E_m \cap E_n = E_k \text{ עבור } k \text{ מ"מ } m \text{ (מכפלה משותפת מינימלית) של } m \text{ ו- } n. \text{ (כמו}$$

במכנה משותף).

$$\text{לדוגמא: } E_4 \cap E_6 = E_{12}$$