

פתרון לתרגיל 4

1. נמצא העתקות חח"ע בין שתי הקבוצות הנתונות

$$a. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$$

$$\text{על ידי } (x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

$$b. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\} \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$$

$$\text{על ידי } (x, y) \rightarrow \left(x+1, \frac{y+1}{2}\right)$$

$$c. \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\} \approx \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$

$$\text{על ידי } (x, y) \rightarrow (x, y\sqrt{1-x^2})$$

2. נתבונן בקבוצה בת מניה של ישרים. לא כל הישרים במישור שיכים לקבוצה זו שכן

אפילו בקבוצת כל הישרים המקבילים לציר x יש כבר א' ישרים.

יהי l ישר שאינו שייך לקבוצה הנ"ל. מכיוון שכל ישר אחר יכול לכסות לכל היותר

נקודה אחת של הישר l , נקבל שקבוצת הישרים שלנו שהיא בת מניה לא יכולה

לכסות אפילו את כל א' הנקודות של הישר l ולכן היא לא יכולה לכסות את כל

המישור.

3. נתבונן במעגלים סביב לראשית בכל א' הרדיוסים הממשיים החיוביים והם זרים זה

לזה.

4. לא יתכן ש $|A \setminus B|$ סופית כיוון שאז $|A|$ היתה בת מניה על ידי

$$A = (A \setminus B) \cup B \text{ שהיא בת מניה. לכן } |A \setminus B| \text{ היא אינסופית ולכן מתקיים ש}$$

$$|A| = |A \setminus B| + |B| = |A \setminus B|$$

על פי מה שקיבלנו לעיל מתקיים שעוצמת קבוצת המספרים הממשיים האי רציונליים

$$\text{היא א' } |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathbb{R}|$$

5. מתקיים ש $P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) \subseteq P(\mathbb{R}) \setminus P(\mathbb{N}) \subseteq P(\mathbb{R})$

$$\text{וכיוון ש } |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph} \text{ ונקבל ש } |P(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N})| = |P(\mathbb{R})| = 2^{\aleph}$$

6. קבוצת כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ היא הקבוצה $P(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ שעוצמתה היא

$$2^{\aleph} = 2^{\aleph} \text{ עוצמתה של } \mathbb{R} \text{ היא א' } |\mathbb{R}| = \aleph \text{ וידוע ש } \aleph < 2^{\aleph}.$$

7. תחילה נוכיח כי לכל קבוצה אינסופית A יש תת קבוצה B בת מניה.
- נבחר איבר של A ונקרא לו b_0 , עכשיו נבחר איבר של $A - \{b_0\}$ ונקרא לו b_1 . נבחר איבר של $A - \{b_0, b_1\}$ ונקרא לו b_2 וכך הלאה. התהליך הזה של בחירת איברים יכול להמשיך מעבר לכל k , כיוון שעבור כל k יש בקבוצה A יותר מ k איברים (כזכור, A היא אינסופית). לקבוצה המורכבת מהאיברים שנבחרו נקרא B , $B = \{b_0, b_1, b_2, \dots\}$.
- הקבוצה B היא תת קבוצה של A והיא קבוצה בת מניה.
- כעת נגדיר את ההעתקה $s: A \rightarrow A - \{b_0\}$ עבור כל $a \in A - B$ נגדיר $s(a) = a$ ועבור כל $b_i \in B$ נגדיר $s(b_i) = b_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. ההעתקה s שהגדרנו היא חח"ע של הקבוצה A על תת קבוצה אמיתית שלה $A - \{b_0\}$. לכן קיבלנו שהקבוצה A היא בעלת עוצמה שווה לזו של התת קבוצה אמיתית שלה $A - \{b_0\}$.
- הוכחנו שעבור כל קבוצה אינסופית A קיימת העתקה חח"ע של A על תת קבוצה אמיתית שלה.
8. נפריך על ידי כך שניקח $A = \mathbb{N}, B = \mathbb{Z}$, מתקיים ש $A \approx B$. אולם $A - B = \emptyset$ וכן $B - A = \mathbb{N}$.
9. נניח ש f חח"ע. f חח"ע אם"ם היא הפיכה משמאל. כלומר קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש $g \circ f = i_A$. כיוון ש $g \circ f = i_A$ אז g היא על.
- נניח ש g על. על אם"ם היא הפיכה מימין. כלומר קיימת פונקציה $f: A \rightarrow B$ כך ש $g \circ f = i_A$. כיוון ש $g \circ f = i_A$ אז f היא חח"ע.
10. נתון ש $|A| \leq |B|$. לכן קיימת העתקה חח"ע מ A ל B . על פי הפתרון לתרגיל 9 קיימת פונקציה על מ B ל A .
- נתון שיש פונקציה על $f: B \rightarrow A$. על פי הפתרון לתרגיל 9 קיימת העתקה חח"ע מ A ל B . כיוון שקיימת העתקה חח"ע מ A ל B אז $|A| \leq |B|$.