

פתרון לתרגיל 6-נוסחאות נסיגה

$$1. \text{ א. } a_1 = 1, a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1, n \geq 1$$

$$\text{נשים לב כי } a_1 = \frac{1}{2}a_0 + 1 \text{ ולכן } a_0 = 0 \text{ אם } a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1, n \geq 1 \text{ אזי}$$

$$n \geq 2 \quad a_{n-1} = \frac{1}{2}a_{n-2} + 1 \quad \text{ולכן נבצע חיסור שתי נוסחאות נסיגה ונקבל}$$

$$a_n - a_{n-1} = \frac{1}{2}(a_{n-1} - a_{n-2}) \quad \text{נכפיל את שני אגפי המשוואה ב-2 ונקבל}$$

$$2a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} = 0 \leftarrow 2a_n - 2a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2}$$

$$\text{נציב } a_n = x^n \text{ ונקבל } 2x^n - 3x^{n-1} + x^{n-2} = 0 \quad \text{נחלק ב-} x^{n-2} \text{ ונקבל}$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 0 \quad \text{(משוואת הפולינום האפייני של נוסחת הנסיגה שלעיל). שורשי}$$

$$\text{המשוואה הם } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2} \quad \text{לכן } a_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n \quad \text{כלומר}$$

$$a_n = \alpha + \beta \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{נמצא את } \alpha, \beta \text{ באמצעות תנאי הבסיס של הרקורסיה.}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}\beta + \alpha = 1, a_0 = \alpha + \beta = 0 \quad \text{ונקבל } \alpha = 2, \beta = -2$$

$$\text{לסיכום נקבל, } a_n = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n, \text{ לכל } n \geq 0$$

$$b. \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_1 = -1, a_2 = 1$$

$$\text{גם כאן נציב } a_n = x^n \text{ ונקבל את הפולינום האפייני } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ שורשי}$$

$$\text{המשוואה הם } x_1 = 2, x_2 = 3 \quad \text{לכן } a_n = \alpha(2)^n + \beta(3)^n \quad \text{נמצא את } \alpha, \beta$$

$$\text{באמצעות תנאי הבסיס של הרקורסיה: } a_1 = 2\alpha + 3\beta = -1, a_2 = 4\alpha + 9\beta = 1$$

$$\beta = 1, \alpha = -2 \quad \text{כלומר}$$

$$\text{לסיכום נקבל } a_n = -(2)^{n+1} + (3)^n \text{ לכל } n \geq 0$$

ג. $a_1 = 1, a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$. גם כאן נציב $a_n = x^n$ ונקבל את הפולינום

$$x^2 - x + 1 = 0 \quad \text{שורשי המשוואה הם} \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$.a_n = \alpha \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \quad \text{לכן} \quad x_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

לסיכום, נקבל

$$a_n = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right)^n \quad (n \geq 0)$$

2. לא רלבנטית

$$.a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad \text{אשר} \quad a_1 = 2, a_0 = 1 \quad a_n = \begin{Bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_{n-1} \end{Bmatrix} \quad 3.$$

$$.a_n = \begin{cases} 0 & a_{n-1} \\ 1 & a_{n-1} \\ -11 & a_{n-2} \\ 2 & a_{n-1} \\ -22 & a_{n-2} \end{cases} \quad a_1 = 3, a_0 = 1 \quad \text{לכאורה זהו הפתרון כאשר} \quad 4.$$

אך נשים לב למקרה בו נפחית את תת הסדרה שמתחילה ב-11 (נתעלם כרגע מהסדרות שמופיע בהן 2) וההמשך שלה חוקי באורך $n-2$ מסדרה שמתחילה ב-1 וההמשך שלה חוקי באורך $n-1$ נוריד יותר מהנדרש.

נראה דוגמא עבור $n=4$:

הסדרות שמתחילות ב-1 וההמשך שלהן הוא חוקי באורך 3 הן:

1000, 1001, 1010, 1101, 1100

מהן נפחית סדרות שמתחילות ב-11 וההמשך שלהן הוא חוקי באורך 2:

1100, 1101, 1110

נשים לב כי הפחתנו סדרה שלא היינו צריכים להוריד (1110) ולכן ניגש לשאלה בצורה קצת אחרת. (כנ"ל עבור המקרים בהם נתחשב ב-2 ובתתי הסדרות שמתחילות ב-22).

אנחנו נרצה להפחית את כל תתי הסדרות שמתחילות ב-11 או ב-22 כלומר להפחית

את כל תתי הסדרות באורך $n-1$ שמתחילות או ב-1 או ב-2 כלומר נוריד a_{n-1}

אבל הורדנו במצב כזה סדרות באורך $n-1$ שמתחילות ב-0 ולכן נוסיף a_{n-2} .

סה"כ נקבל:

$$a_n = \begin{cases} 1 & a_{n-1} \\ 0 & a_{n-1} \\ 2 & a_{n-1} \\ -a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$$

$$a_n = 3a_{n-1} - (a_{n-1} - a_{n-2}) = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

(רמז: תחשבו על שאלה בה הייתם צריכים להוריד את כל תתי הסדרות בהן היו שני מספרים סמוכים זהים כלומר: 00, 11, 22. במקרה כזה נוריד תת סדרה שמתחילה

0, 1 או 2 וההמשך חוקי באורך $n-1$ כלומר נוריד (a_{n-1}) .)

נציב $a_n = x^n$ ונקבל פולינום אפייני $x^2 - 2x - 1 = 0$ כלומר שורשי הפולינום

הם: $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$ ולכן נוסחת הנסיגה היא מהצורה

$$a_n = \alpha(1 + \sqrt{2})^n + \beta(1 - \sqrt{2})^n \quad (n \geq 0)$$

$$\text{כלומר } a_0 = 1 = \alpha + \beta \quad a_1 = 3 = \alpha(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2})$$

$$\text{ולכן } 3 = (1 - \beta)(1 + \sqrt{2}) + \beta(1 - \sqrt{2}) = 1 - 2\sqrt{2}\beta + \sqrt{2}$$

$$\alpha = 1 - \beta = 1 - \frac{-\sqrt{2} + 1}{2} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}, \quad \frac{2 - \sqrt{2}}{-2\sqrt{2}} = \beta = \frac{-\sqrt{2} + 1}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})^{n+1} \quad (n \geq 0)$$

5. לא רלבנטית.

6. נדגיש כי בשאלה זו F_i מייצג את האבר ה- i בסדרת פיבונאצי.

א. בצורה זו $F_6 = 8, F_5 = 5, F_4 = 3, F_3 = 2, F_1 = F_2 = 1$ נגדיר סדרה

$$a_n = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1}, \quad a_1 = F_1 = 1 = F_2, \quad a_2 = F_1 + F_3 = 3 = F_4$$

$$a_3 = F_1 + F_3 + F_5 = 8 = F_6$$

כלומר ניתן לנחש כי $a_n = F_{2n}$. נוכיח זאת באינדוקציה:

$$a_1 = F_1 = F_2 : n = 1$$

הנחת האינדוקציה: נניח כי $a_n = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$ ונוכיח כי

$$a_{n+1} = F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n+1} = F_{2(n+1)}$$

$$a_{n+1} = F_{2n} + F_{2n+1} = F_{2(n+1)} \quad (\text{מההנחה}). \text{ וזה ברור כי בסדרת פיבונאצי } F_{2n+2}$$

הוא סכום שני האברים שלפניו כלומר $F_{2n} + F_{2n+1}$ והוכחנו את הנדרש.

ב. בצורה דומה נגדיר כי $b_n = F_2 + F_4 + \dots + F_{2n}$ לכן $b_1 = F_2 = 1 = F_3 - 1$,

$$b_2 = F_2 + F_4 = 4 = F_5 - 1 \quad \text{כלומר ניתן לנחש כי } b_n = F_{2n+1} - 1$$

את ההוכחה באינדוקציה נשאיר לקוראים.

ג. נגדיר $c_n = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots (-1)^{n-1} F_n$ שזה בדיוק ההפרש בין $a_{n/2}$ ל- $b_{n/2}$.

$$\begin{aligned} \text{אם } n \text{ זוגי } a_{n/2} &= F_1 + F_3 + \dots + F_{n-1} = F_n \\ c_n &= F_n - F_{n+1} + 1 \text{ כלומר } b_{n/2} = F_2 + F_4 + \dots F_n = F_{n+1} - 1 \\ \text{אם } n \text{ אי זוגי } a_{n/2} &= F_1 + F_3 + \dots + F_{n-2} + F_n = F_{n+1} \\ c_n &= F_{n+1} - F_n + 1 \text{ כלומר } b_{n/2} = F_2 + F_4 + \dots F_{n-1} = F_n - 1 \end{aligned}$$

7. א. נפריד את g_n לשני מקרים :

1. אם n שייך לאוסף תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים בכ"א מתתי הקבוצות הללו. כלומר בהכרח $n-1$ לא שייך לתתי הקבוצות הללו. כלומר מדובר באוסף תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, n-2\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים כלומר מדובר בבעיית g_{n-2} .

2. אם n לא שייך לאוסף תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים בכ"א מתתי הקבוצות הללו.

כלומר מדובר באוסף תתי הקבוצות של $\{1, 2, \dots, n-1\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים כלומר מדובר בבעיית g_{n-1} .

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2} \quad (n \geq 2) \quad g_0 = 1(\phi), g_1 = 2(\phi, \{1\})$$

$$\text{ידוע כי } F_0 = 1 = F_1 \quad (n \geq 2) \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{קל לראות כי} \\ (g_0 = F_1 = 1, g_1 = F_2 = 2, g_2 = F_3 = 3, \dots) \quad g_n = F_{n+1} \quad (n \geq 0)$$

ב. תת קבוצה בגודל k של $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין בה שני מספרים עוקבים. נשים לב שזהו מקרה פרטי של סעיף א. בו אנו מתייחסים לכל תת קבוצה של $\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין בה שני מספרים עוקבים.

נסתכל לדוגמא על הקבוצה $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ונרצה לבחון את מספר תתי הקבוצות שלה בגודל 4 כך שאין שני מספרים עוקבים.

נקבל את תתי הקבוצה הבאה: $\{1, 3, 5, 7\}$.

נציג את תת הקבוצה הזו בצורה הבאה:

אם האבר שייך לקבוצה אז נסמנו ב-1 אחרת | (מחיצה) כלומר נקבל את הרצף הבא: נשים לב שאין לנו שני 1-ים רצופים (תמיד תפריד ביניהם מחיצה)

$1|1|1|1$. כלומר יש לנו $k=4$ 1-ים להכניס בין $n-k=4$ מחיצות שזה להכניס ל- $n-k+1$ תאים.

ניתן להתייחס לבעיה כמס הדרכים להכניס k 1-ים ל- $n-k+1$ תאים כך שבכל

$$\text{תא יש לכל היותר 1 יחיד (צירופים ללא חזרה) כלומר} \quad \binom{n-k+1}{k}$$

ג. $g_n = \sum_{k=0}^{(n+1)/2} \binom{n-k+1}{k}$ שהרי מדובר באוסף כל תתי הקבוצות של

$\{1, 2, \dots, n\}$ כך שאין שני מספרים עוקבים. נשים לב שהגודל המקסימלי של תת

קבוצה כזו הוא $(n+1)/2$. מסעיף א. ברור כי $F_{n+1} = g_n = \sum_{k=0}^{(n+1)/2} \binom{n-k+1}{k}$

ולכן נסיק כי $F_n = \sum_{k=0}^{n/2} \binom{n-k}{k}$ כנדרש.

8. ניתן להפריד את הבעיה לשני מקרים באופן רקורסיבי:

נתונה התמורה $(1234 \dots n)$ ונרצה לבדוק את כל האפשרויות לסדר את

התמורה מחדש כך שכל מספר יכול לזוז מקום אחד לכל היותר ימינה או שמאלה.

כלומר: א. אם 1 יזוז מקום אחד ימינה אזי בהכרח 2 יזוז מקום אחד שמאלה (למקומו הקודם של 1) אחרת 2 יזוז שמאלה וכך גם 3 עד שנגיע ל- n שנצטרך להציב אותו במקום הראשון משמאל בניגוד לדרישות השאלה. כלומר 1 ו-2 התחלפו

ונותר לנו לסדר $n-2$ מקומות כלומר ניתן להתייחס לזאת כבעיית a_{n-2} .

ב. אם 1 ישאר במקומו אז נותר לנו לסדר $n-1$ מקומות כלומר ניתן להתייחס

לזאת כבעיית a_{n-1} .

לסיכום נקבל $(n \geq 2)$ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ כאשר $a_1 = 1, a_0 = 1$.