

מתמטיקה בדידה – תרגיל 6

1. פתרו את נוסחאות הנסיגה הבאות:

$$א. \quad a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + 1, a_1 = 1$$

$$ב. \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_1 = -1, a_2 = 1$$

$$ג. \quad a_n = a_{n-1} - a_{n-2}, a_1 = 1, a_2 = 2$$

2. נוסחת נסיגה לא הומוגנית ליניארית מסדר 2 עם מקדמים קבועים היא מהצורה:

$$a_n = Aa_{n-1} - Ba_{n-2} + t_n (**)$$

כאשר A ו- B הם קבועים ו- t_n היא פונקציה של n . הנוסחה ההומוגנית המתאימה היא

$$.a_n = Aa_{n-1} - Ba_{n-2}$$

א. הוכיחו כי אם $\{x_n\}$ הוא פתרון של $(**)$ ו- $\{y_n\}$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה אז $\{x_n + y_n\}$ הוא הפתרון של $(**)$.

ב. יהי $\{x_n\}$ פתרון מתוקן של $(**)$ ויהי $\{z_n\}$ פתרון אחר של $(**)$. הוכיחו כי קיים פתרון $\{y_n\}$ של הנוסחה ההומוגנית המתאימה כך ש- $z_n = x_n + y_n$ לכל n . (רמז:

$$z_n - x_n = y_n \text{ אם ורק אם } z_n = x_n + y_n$$

(הערה: שימו לב לדמיון בין קבוצת הפתרונות של $(**)$ וקבוצת הפתרונות של מערכת לא הומוגנית של משוואות ליניאריות – כל פתרון הוא פתרון ספציפי + פתרון הומוגני).

ג. השתמשו בחלקים א ו-ב של בעיה זו כדי לפתור את נוסחת הנסיגה:

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 2^n$$

3. יהי b_n מייצג את מספר הרצפים של n סיביות מעל $\{0,1\}$ שלא מכילים שני 0-ים עוקבים.

לדוגמא: 0111101101. הוכיחו כי $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ ($n \geq 3$) ומצאו את b_n .

4. יהי d_n מייצג את מספר הרצפים של n סיביות מעל $\{0,1,2\}$ שלא מכילים שני 1-ים עוקבים

ושני 2-ים עוקבים. לדוגמא: 0121001201.

הוכיחו כי $d_n = d_{n-1} + d_{n-2}$. פתרו את נוסחת הנסיגה והוכיחו כי

$$d_n = 1 + 2\binom{n+1}{2} + 2^2\binom{n+1}{4} + 2^3\binom{n+1}{6} + \dots + 2^n\binom{n+1}{n!}$$

5. M תהי המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי $M^{n+2} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$ כאשר F_n הוא המספר ה- n בסדרת פיבונאצ'.

ב. ע"י שימוש בדטרמיננטות של המטריצות שלעיל הוכיחו כי $F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 = (-1)^n$.

ג. בהתחשב בזהות $M^{m+n+2} = M^{m+1} M^{n+1}$ הוכח כי $F_{m+n} = F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}$.

6. לכל אחד מהנוסחאות הבאות בדקו את הערכים הראשונים של n ונחשו מהו F_n .

הוכיחו את ניתושיך באינדוקציה.

א. $F_1 + F_2 + \dots + F_{2n-1}$

ב. $F_2 + F_4 + \dots + F_{2n}$

ג. $F_1 - F_2 + \dots + (-1)^{n-1} F_n$

7. א. יהי g_n מספר תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ שלא מכילים שני מספרים שלמים עוקבים.

לדוגמא: $g_1 = 2, (\phi, \{1\}), g_2 = 3, (\phi, \{1\}, \{2\})$.

מצאו נוסחת נסיגה ל g_n והסק כי $g_n = F_{n+1}$.

ב. תת קבוצה k של $\{1, \dots, n\}$ היא רצף בינארי של באורך n מכיל k ים-1 ו- $n-k$ ים-0. הוכיחו כי מספר תתי קבוצות k של $\{1, \dots, n\}$ שלא מכיל שני מספרים עוקבים שלמים הוא

$$\binom{n-k+1}{k}$$

ג. הסיקו כי $F_n = \sum_{k \leq \frac{1}{2}n} \binom{n-k}{k}$

8. בצלצול פעמון, תמורות עוקבות של n פעמונים מנוגנות אחת אחר השנייה. עבור תמורה π , התמורה הבאה חייבת להתקבל מ- π ע"י הזזת המיקום של כל פעמון במקום אחד לכל היותר.

לדוגמא: עבור $n = 4$ התמורה 1234 יכולה להתקבל ע"י אחת מהתמורות הבאות:

2134, 2143, 1324, 1243. הוכיחו כי אם a_n מייצג את מספר התמורות שניתן לבנות

מ $1, 2, \dots, n$ אז $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$. מצאו את a_n .