

תרגיל 4

1. בכל אחד מהזוגות הבאים הראה כי שתי הקבוצות במישור הן שוות עוצמה זו לזו.

a. העיגול $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

והעיגול $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}$

b. הריבוע $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$

והמלבן $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < 2, 0 < y < 1\}$

c. הריבוע $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x, y < 1\}$

והעיגול $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

2. הוכיחו כי אין קבוצה בת מניה של ישרים שהאיחוד שלהם הוא כל המישור.

3. הוכיחו כי כל קבוצת מעגלים במישור שרק היקפיהם זרים זה לזה אינה בהכרח בת מניה.

4. הוכיחו כי אם B תת קבוצה בת מניה של A שאינה בת מניה אז $|A \setminus B| = |A|$.

מהי עוצמת קבוצת המספרים הממשיים האי רציונליים?

5. חשבו את עוצמת הקבוצה $P(\mathbb{R}) \setminus P(\mathbb{N})$.

6. הוכיחו שעוצמתה של קבוצת כל הפונקציות $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ גדול ממש מעוצמתה של $\mathbb{R}$.

7. הוכיחו שלכל קבוצה אינסופית A יש תת קבוצה אמיתית (תת קבוצה ממש) בעלות עוצמה שווה לזו של A .

8. הוכיחו או הפריכו: $A \approx B \Rightarrow A - B \approx B - A$

9. הוכיחו שיש פונקציה חח"ע $f: A \rightarrow B$ אם ורק אם יש פונקציה על $g: B \rightarrow A$.

10. יהיו A, B קבוצות. הוכיחו ש- $|A| \leq |B|$ אם ורק אם יש פונקציה על $f: B \rightarrow A$.