

תרגיל 2

1. רשום את כל איברי הקבוצה $P(P[P(\emptyset)])$.
2. מצא תנאים הכרחיים ומספיקים על קבוצות A, B כך ש- $A \times B = B \times A$. התנאי $A = B$ איננו הכרחי.
3. לכל מס' טבעי n תהי $n\mathbb{Z} = \{nk : k \in \mathbb{Z}\}$.
 (א) הוכח כי $n\mathbb{Z} \subseteq m\mathbb{Z}$ אם ורק אם $m|n$ (ז"א m מחלק את n).
 (ב) מהי $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} n\mathbb{Z}$?
4. יהיו $A = \{1\}$, $B = \{2\}$.
 (א) רשום את כל איברי $P(A) \times P(B)$.
 (ב) רשום את כל איברי $P(A \times B)$.
5. ציינו לגבי כל אחד מהיחסים הבאים אם הוא יחס שקילות בקבוצה $\{1, 2, 3, 4\}$. אם כן, מצאו את החלוקה המושרית על ידו.
 א. $R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (3, 1)\}$.
 ב. $R_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$.
6. ציינו לכל אחד מהיחסים הבאים אם הוא רפלקסיבי, אנטי-רפלקסיבי, סימטרי, אנטי-סימטרי, או טרנזיטיבי. אם מדובר על יחס שקילות, מצאו את מחלקות השקילות שלו.
 א. $R_1 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a < b\}$.
 ב. $R_2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}, a \leq b\}$.
 ג. $R_3 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}, 2 \mid (m + n)\}$.
 ד. תהי X קבוצה לא ריקה. אז: $R_4 = \{(A, B) \mid A, B \in P(X), A \subseteq B\}$.
 ה. תהי X קבוצה לא ריקה. אז: $R_5 = \{(A, B) \mid A, B \in P(X), A \cap B = \emptyset\}$.
7. יהיו S, R יחסים בקבוצה לא ריקה A . גם $S \cup R, S \cap R$ הם יחסים ב- A . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
 א. אם S, R רפלקסיביים אז גם $S \cap R$ רפלקסיבי.
 ב. אם S, R אנטי-רפלקסיביים אז גם $S \cap R$ אנטי-רפלקסיבי.
 ג. אם S, R סימטריים אז גם $S \cap R$ סימטרי.
 ד. אם S, R אנטי-סימטריים אז גם $S \cap R$ אנטי-סימטרי.
 ה. אם S, R טרנזיטיביים אז גם $S \cap R$ טרנזיטיבי.
 ו. אם S, R רפלקסיביים אז גם $S \cup R$ רפלקסיבי.
 ז. אם S, R אנטי-רפלקסיביים אז גם $S \cup R$ אנטי-רפלקסיבי.
 ח. אם S, R סימטריים אז גם $S \cup R$ סימטרי.
 ט. אם S, R אנטי-סימטריים אז גם $S \cup R$ אנטי-סימטרי.
 י. אם S, R טרנזיטיביים אז גם $S \cup R$ טרנזיטיבי.
 יא. אם S, R יחסי שקילות אז גם $S \cup R$ יחס שקילות.

8. הוכיחו שאם R, S יחסי שקילות אז גם $S \cap R$ יחס שקילות. איך ניתן לתאר את יחס שקילות הזה? לדוגמה, הניחו כי R הוא יחס השקילות E_2 (יחס השקילות מודולו 2), ואילו S הוא היחס E_3 . מה תוכלו לומר על מחלקות השקילות של היחס $E_2 \cap E_3$? מצאו מספר k כך ש- $E_2 \cap E_3 = E_k$. לכל מספרים $m, n > 1$ מצאו מספר k כך ש- $E_m \cap E_n = E_k$.