

מתמטיקה בדידה: סיליבוס מפורט

סמסטר א' תשס"ו

גירסה ראשונה: פרופ' שלום פייגלשטוק

תרמו לגירסה שניה: ד"ר אלי בגנו, ד"ר דוד גרבר, וד"ר בועז צבאן

הערות. החומר מחולק על פי אומדן ל 12 הרצאות בנות 3 שעות אקדמיות כל אחת (שעה אקדמית = 45 עד 50 דקות). החלוקה הנוכחית טרם נוסתה בפועל, אולם היא עדכון של חלוקה קודמת שנוסתה. ייתכן שבפועל נושא מסויים ידרוש יותר ממספר ההרצאות המוקצה לו, ונושא אחר פחות. בקורסים שבהם יותר מ 12 הרצאות, יש לפרט מעט יותר בחלק מהנושאים.

הרצאה 1

קבוצות ופעולות עליהן

הערה. חלק נכבד מהדוגמאות יש לעשות בתרגיל. במהלך ההוכחות יינתן דגש על ניסוח נכון של הוכחה (כגון: הוכחת טענות מהצורה "לכל x מתקיים..." יתחילו ב"יהי נתון x כלשהו...") ושאר עניינים אלמנטריים.

1. **קבוצה, איברים, השתייכות** $\in$, אי השתייכות $\notin$.

2. תיאור קבוצה ע"י רשימה.

דוגמא: $A = \{1, 2, 3\}$, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.

3. תיאור קבוצה ע"י תכונה. דוגמא: $A = \{x \in N : 0 < x < 4\}$.

הרציונלים: $Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z, b \neq 0\}$, הממשיים: R (ללא הגדרה).

4. **הפרדוקס של ראסל.**

5. **שוויון קבוצות:** $A = B$ פירושו $x \in B \Leftrightarrow x \in A$.

סדר וריבוי אינם חשובים.

אי שוויון $A \neq B$.

6. **הכלה,** קבוצה חלקית/תת-קבוצה: $A \subseteq B$ פירושו $x \in A \Rightarrow x \in B$.

אי הכלה $A \not\subseteq B$.

תכונות הכלה: רפלקסיביות, טרנזיטיביות, אנטי-סימטריות.

7. **קבוצה ריקה** $\emptyset$.

8. **הסכס:** $\{ \text{שקר} \Leftarrow \text{משהו} \}$ הוא אמת.

מסקנה: $\emptyset$ מוכלת בכל קבוצה.

9. **איחוד:** $A \cup B = \{x : x \in A \text{ או } x \in B\}$. דיאגרמת וון.

לוח השתייכות:

A	B	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

תכונות איחוד: $A \cup \emptyset = A$, $A \subseteq B$ אם ורק אם $A \cup B = B$. $A \cup B = B \cup A$.

10. **חיתוך:** $A \cap B = \{x : x \in A \text{ וגם } x \in B\}$. דיאגרמת וון ולוח השתייכות.

תכונות: $A \cap B = B \cap A$, $A \cap B = B$ אם ורק אם $B \subseteq A$.

11. **קבוצות זרות.**

12. **הפרש:** $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$. דיאגרמת וון ולוח השתייכות.

תכונות: $A \setminus \emptyset = A$, $A \setminus U = \emptyset$, $A \subseteq B$ אם ורק אם $A \setminus B = \emptyset$, לא סימטרי.

13. **הפרש סימטרי:** $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

תכונות: $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, סימטרי.

הרצאה 2

פעולות על קבוצות (המשך)

1. קיבוץ/אסוציאטיביות: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, וכן עבור חיתוך והפרש סימטרי (הוכחה בעזרת לוח השתייכות).

2. פילוג/דיסטריביוטיביות:
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. משלים בתוך קבוצה U : $A' = A^c = \{x \in U : x \notin A\}$.
 דיאגרמת וון ולוח השתייכות.
 תכונות: $(A')' = A$, $B' \subseteq A'$ אזי $A \subseteq B$ אם $\emptyset' = U$, $U' = \emptyset$,
 $B \cap A^c = B \setminus A$, $A \cup A^c = U$, $A \cap A^c = \emptyset$

4. משפטי דה-מורגן. $(A \cup B)' = A' \cap B'$, $(A \cap B)' = A' \cup B'$

5. חוק הדואליות (ללא הוכחה):
 ביטוי דואלי $d(P)$ של ביטוי P הוא הביטוי המתקבל מ- P ע"י החלפת $\cup, \cap$ והחלפת $\emptyset, U$.
 אם $P=Q$ הוא זהות אזי $d(P)=d(Q)$ הוא זהות.
 דוגמא: $A \cup (B \cup B') = U$. הזהות הדואלית היא $A \cap (B \cap B') = \emptyset$

6. איחוד כללי: יהיו $A_1, \dots, A_n$ קבוצות. קיים $1 \leq i \leq n$ כך ש- $x \in A_i$ $\bigcup_{i=1}^n A_i = \{x \in U : x \in A_i\}$
 קיים $i \in I$ כך ש- $x \in A_i$ $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in U : x \in A_i\}$

דוגמא: לכל $k \in \mathbb{N}$ תהי $A_k = [-k, k]$ אז $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \mathbb{R}$

7. חיתוך כללי, כנ"ל. דוגמא: לכל $k \in \mathbb{N}$ $A_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$ אז $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{0\}$

8. $P(A) = \{B : B \subseteq A\}$ היא קבוצת החזקה של A .

9. דוגמא: $A = \{0, 1\}$, $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}$. $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

10. זוג סדור (a, b) והגדרת שוויון זוגות סדורים. הסדר משנה.
 דוגמא: $B = \{1, 2\}$, $A = \{\text{כלב}, \text{חתול}\}$, $A \times B = \{(\text{חתול}, 1), (\text{חתול}, 2), (\text{כלב}, 1), (\text{כלב}, 2)\}$

11. n -יה סדורה, המכפלה הקרטזית של $A_1, \dots, A_n$:
 $A_1 \times \dots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n) : 1 \leq i \leq n, a_i \in A_i\}$
 סימון: $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_n$

12. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ - המישור.

הרצאה 3

יחסים

1. קבוצה חלקית R של $A \times B$ נקראת **יחס** מ- A ל- B .
2. סימן: יהי R יחס מ- A ל- B אזי $(a, b) \in R$ יסומן aRb .
3. דוגמא: תהי A קבוצת אנשים. היחס Wt מ- A ל- N הוא $Wt = \{(a, a) : a \in A\}$ (משקלו של a). $(70, 70) \in Wt$ (חיים) יסומן $70 Wt 70$.
4. **יחס רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי, יחס שקילות**. דוגמאות. יחסים מיוחדים על קבוצה A : היחס הריק $\emptyset$, **יחס הזהות** 1_A , **היחס המלא** $A \times A$.
5. **חלוקה** $\{A_i : i \in I\}$ של קבוצה A . דוגמאות.
6. יהי $\{A_i : i \in I\}$ חלוקה של A , אזי $R = \bigcup_{i \in I} (A_i \times A_i)$ הוא יחס שקילות על A . קוראים לו **היחס המושרה** ע"י החלוקה.
7. דוגמאות. לכל $i \in N$ תהי $A_i = \{x \in R : i \leq x < i+1\}$. האוסף $\{A_i : i \in N\}$ הוא חלוקה של הממשיים. היחס המושרה הוא $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$ שפירושו, החלק השלם של x מלמטה שווה לחלק השלם של y מלמטה.
8. יהי R יחס שקילות על A ויהי $a \in A$. **מחלקת השקילות של a** $[a]_R = a$. מסומנת $[a]$ כאשר R ברור מההקשר. רשימת תכונות השקולות ל $[a] = [b]$.
9. יהי R יחס שקילות על A , אזי $\{[a]_R : a \in A\}$ הוא חלוקה של A . דוגמאות. היחס $a \equiv b \pmod n$.
10. קיימת התאמה חח"ע ועל בין החלוקות של A לבין יחסי השקילות על A .
11. קבוצת המנה A/R , פונקציות מוגדרות היטב על קבוצת המנה. דוגמאות.

הרצאה 4

1. הגדרה: **תחום** של יחס $\text{dom}(R)$, **תמונה** של יחס $\text{im}(R)$, יחס **חד-ערכי**.
2. **פונקציה** $f: A \rightarrow B$. היא יחס חד-ערכי $R \subseteq A \times B$ שתחומו A .
 $(a, b) \in f$ יסומן $f(a) = b$ או $b = f(a)$.
 דוגמא: $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a, A = \{1, 2, 3\}, B = \{a, b, c, d\}$.
 דוגמא: תהי A קבוצת אנשים. $f: A \rightarrow R$ מוגדרת ע"י $f(a) =$ משקלו של a לכל $a \in A$.
3. **פונקציה חח"ע**. דוגמאות.
4. **הרכבת פונקציות**: $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ אזי $g \circ f: A \rightarrow C$ מוגדרת ע"י $g \circ f(a) = g(f(a))$ לכל $a \in A$. דוגמאות.
5. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ אזי $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C, h: C \rightarrow D$.
6. $f \circ g \Leftarrow$ חד חד ערכית $g \Leftarrow$ חד חד ערכית.
7. **פונקצית הזהות** 1_A .
 $f: A \rightarrow B$ אזי $f \circ 1_A = f$ ו- $1_B \circ f = f$.
8. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא חח"ע אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = 1_A$. דוגמא.
9. **פונקציה על**. דוגמאות.
10. $f \circ g \Leftarrow$ על $f \Leftarrow$ על.
11. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא על אם ורק אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $f \circ g = 1_B$.
12. תהי $f: A \rightarrow B$ פונקציה, ויהיו $g_1, g_2: B \rightarrow A$ פונקציות. אם $g_1 \circ f = 1_A$ ו- $f \circ g_2 = 1_B$ אזי $g_1 = g_2$.
13. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא **הפיכה** אם קיימת פונקציה $g: B \rightarrow A$ כך ש- $g \circ f = 1_A$ ו- $f \circ g = 1_B$. אם f היא הפיכה אזי g הנ"ל היא יחידה ותסומן f^{-1} . דוגמאות.
14. פונקציה $f: A \rightarrow B$ היא הפיכה אם ורק אם f היא חח"ע ועל.
15. עבור $f: X \rightarrow Y$ וקבוצות $A \subseteq X, B \subseteq Y$ $f[A] = \{f(a) : a \in A\}$ ו- $f^{-1}[B] = \{a : f(a) \in B\}$.
16. **הפונקציה המצומצמת** $f|_A: A \rightarrow Y$.
17. **משפט ההרחבה של פונקציות**: לאוסף $\{f_i : i \in I\}$ של פונקציות מתיישבות, $h = \bigcup_{i \in I} f_i$ מרחיבה את כולן, $\text{im}(h) = \bigcup_{i \in I} \text{im}(f_i)$, $\text{dom}(h) = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(f_i)$.
- לוגיקה על קצה המזלג**
18. **קשרים לוגיים** כפונקציות של ערכי אמת T, F .
19. **טבלאות אמת ושקילות לוגית**.
 שקילות לוגיות בסיסיות: חוקי דה מורגן, הצגת קשרים אחרים בעזרת $\neg, \vee$, הוכחה בדרך השלילה
 $(\neg \neg A \Leftrightarrow A)$ (ב) $(\neg \neg A \Leftarrow \neg A)$.

הרצאה 5

השוואת עוצמות

הערה. לבחירת המרצה, ניתן לוותר על ההגדרה הפורמלית של עוצמה של קבוצה ולהגדיר ישירות שוויון ואי-שוויון עוצמות.

1. **הגדרה:** $A \approx B$ אם קיימת $f: A \rightarrow B$ חח"ע ועל.

2. $[A] = \{B \mid A \approx B\}$. **העוצמה של קבוצה** A , מסומנת $|A|$, היא מחלקת השקילות $[A]$ ביחס $\approx$.

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A \approx B \quad 3.$$

4. אם $A \approx \{1, \dots, n\}$, נסמן $|A| = n$.

5. A **סופית** אם יש n טבעי או 0 כך ש- $|A| = n$. אחרת, A **אינסופית**.

6. כל תת-קבוצה של קבוצה סופית היא סופית. הקבוצה $\mathbb{N}$ (וכל קבוצה שהיא מוכלת בה) היא אינסופית.

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0 \quad 7. \text{ סימון:}$$

$$|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0, |\mathbb{Z}| = \aleph_0 \quad 8.$$

9. **הגדרה:** $|A| \leq |B|$ אם יש $f: A \rightarrow B$ חח"ע. אם $|A| \leq |B|$ ו- $|A| \neq |B|$, נסמן: $|A| < |B|$.

10. $\leq$ בין עוצמות מוגדר היטב, והוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

11. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$.

12. קבוצה A היא **בת-מניה** אם $|A| \leq \aleph_0$.

13. כל תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה.

14. דוגמא: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \emptyset$ וכל קבוצה סופית הן בנות-מניה.

15. $|A| \leq |B| \Leftrightarrow$ יש פונקציה $f: B \rightarrow A$ שהיא על.

16. איחוד סופי או בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה.

17. **משפט הקבוצה האינסופית:** לכל קבוצה אינסופית A , יש תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$ (ז"א

$|A| \geq \aleph_0$). כמו כן: יש $B \subset A$ (מוכלת ממש), כך ש- $|B| = |A|$. למעשה, לכל $a \in A$, $|A - \{a\}| = |A|$.

הרצאה 6

עוצמות (המשך)

1. משפט קנטור-ברנשטיין: $\leq$ בין עוצמות הוא אנטי-סימטרי.
2. מסקנה: $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$.
3. משפט קנטור: לכל קבוצה A , מתקיים: $|A| < |P(A)|$.
4. מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות שונות.
5. משפט (ללא הוכחה, דורש למת צורך): היחס $\leq$ בין עוצמות הוא מלא, ז"א: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים או $|A| \leq |B|$ או $|B| \leq |A|$.
6. עוצמת הרצף: $|\mathbb{R}| = \aleph = c$.
7. $\left| \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right| = \aleph$.
8. לכל שני מספרים ממשיים $a < b$ מתקיים: $|(a, b)| = |(0, 1)| = \aleph$.
9. לכל שני מספרים ממשיים $a < b$ מתקיים: $|(a, b)| = [a, b] = (a, b) = [a, b] = \aleph$.

פעולות חשבוניות על עוצמות

10. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ והקבוצות A, B זרות, אז: $\kappa + \lambda = |A \cup B|$.
11. $0 + \aleph_0 = n + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.
12. $\aleph + \aleph = \aleph$.
13. חיבור עוצמות הוא חילופי: עבור κ, λ עוצמות, מתקיים: $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.
14. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ אז: $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$.
15. $\aleph_0^k = \aleph_0$ ולכל k טבעי מתקיים: $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.
16. פונקציה השזירה: $f: (0, 1)^2 \rightarrow (0, 1)$ מוגדרת על ידי:
 $f(0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots) = 0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots$
17. $\aleph \cdot \aleph = \aleph$.

הרצאה 7

פעולות חשבוניות על עוצמות (המשך)

1. סימון: $A^B = \{f \mid f: B \rightarrow A\}$.
2. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ אז $\kappa^\lambda = |A^B|$.
3. לכל קבוצה A , מתקיים $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$.
4. מסקנה: $|P(A)| = 2^{|A|}$.
5. לכל עוצמה κ , מתקיים $\kappa < 2^\kappa$.
6. $\aleph_0 = 2^{\aleph_0}$, ולכן: $\aleph_0 < \aleph_1$.
7. הפעולות של חיבור וכפל עוצמות מקיימות קיבוץ, חילוף ופילוג.
 8. תכונות של חזקות של עוצמות:
 - א. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.
 - ב. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.
 - ג. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.
 - ד. אם $\kappa \leq \lambda$ אז $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
 - ה. אם $0 < \lambda \leq \mu$ אז $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
 - ו. $\kappa^0 = 1, 1^\kappa = 1$.
 - ז. אם $0 < \kappa$, אז $0^\kappa = 0$.
9. **משפט** (ללא הוכחה): אם κ או λ אינסופיות, אז: $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.
10. אם $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$, ו- λ אינסופית, אז $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.
11. דוגמאות: $|\mathbf{R}^N| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph, \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph = \aleph^{\aleph_0}$.

הרצאה 8

קומבינטוריקה

1. **עיקרון הסכום:** A, B קבוצות סופיות זרות, ז"א $A \cap B = \emptyset$, אזי $|A \cup B| = |A| + |B|$.
2. דוגמא: ישנם 20 בנים ו-25 בנות בכיתה. מס' הילדים בכיתה הוא 45.
3. **עיקרון הסכום המורחב.** אם $A_1, \dots, A_n$ הן קבוצות סופיות זרות בזוגות, אז $|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i|$.
4. **עיקרון המכפלה.** אם A, B הן קבוצות סופיות, אז $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.
5. דוגמא: חברה מייצרת מכוניות מדגם א', ב', ו-ג'. ניתן להזמין כל דגם בצבעים לבן, כחול ואדום. מס' הדרכים להזמין מכונית מן החברה הוא 9.
6. **עיקרון המכפלה המורחב.** אם $A_1, \dots, A_n$ הן קבוצות סופיות, אז $|A_1 \times \dots \times A_n| = \prod_{i=1}^n |A_i|$.
7. דוגמא: רשיון רכב מורכב משתי אותיות בין $A-Z$, ואחריהן ארבע ספרות בין 0-9. מס' הרשיונות האפשריים הוא $26^2 \cdot 10^4$.
8. $|A| = n$. **תמורה של A** היא סידרה עם n איברים, כל איבר של A הוא איבר של הסידרה. מס' התמורות של A הוא $n!$.
9. **בעיה כללית.** למצוא מס' הדרכים לבחור k איברים מתוך קבוצה A בעלת n איברים – יש שני פרמטרים: הסדר חשוב או לא חשוב, והאם יש חזרות או לא.
10. **מקרה א' - הסדר חשוב, ואין חזרות:** מס' הדרכים הוא $n!/(n-k)!$. דוגמא: לבחור ועד כיתה מורכב מ- יו"ר, סגן, וגזבר.
11. בעיה שקולה לסעיף (10): מס' הדרכים למלא k תאים (מסודרים) שתכולתם 1 על ידי n כדורים שונים.
12. **מקרה ב' - הסדר לא חשוב ואין חזרות:** מס' הדרכים הוא $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (שהוא מספר תת-הקבוצות בגודל k בקבוצה בגודל n). דוגמא: בחירת ועד כיתה של שלשה תלמידים, כולם שווים.
13. **מסקנה:** $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. משמעות שוויון זה לגבי הנ"ל.
14. בעיה שקולה לסעיף (12): מס' הדרכים למלא תא בגודל k בהנתן n חפצים שונים.
15. **מקרה ג' - סדר חשוב עם חזרות:** מס' הדרכים הוא n^k . **דוגמא:** בגלגל רולטה ישנם מס' מ-0-35. מס' התוצאות האפשריות ב-10 סיבובים הוא 36^{10} .
16. בעיה שקולה לסעיף (15): מס' הדרכים לחלק k חפצים שונים לתוך n תאים. תכולת כל תא היא בלתי מוגבלת.
17. **מקרה ד' - סדר לא חשוב, עם חזרות, k מתוך n :** מס' הדרכים הוא $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$.

18. בעיה שקולה לסעיף (17): חלוקת k חפצים זהים לתוך n תאים, תכולת כל תא בלתי היא מוגבלת.

19. דוגמא: מטבעות הם מסוג 10 אג', חצי שקל, ושקל. מס' הדרכים לתת 5 מטבעות הוא $\binom{7}{5}$.

20. דוגמא: מס' הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים הוא $\binom{13}{10}$.

21. דוגמא: כנ"ל, רק סכום של מס' חיוביים. מס' הפתרונות הוא $\binom{9}{6}$.

22. דוגמא: מס' הפתרונות של אי השוויון $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים הוא מס' הפתרונות של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y = 10$ כסכום של מס' שלמים לא שליליים, והוא $\binom{14}{10}$.

הרצאה 9

קומבינטוריקה (המשך)

1. משפט הבינום: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

2. $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ ולכן אם $|A| = n$ אזי $|P(A)| = 2^n$.

3. הצבת $x = -1$ ו- $y = 1$ במשוואה $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ נותן $0 = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}$ או

$$1 = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{n}{k} \quad \text{ולכן} \quad -1 = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k}$$

4. זהות פסקל: $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

5. משולש פסקל.

6. מקדמים מולטייליניאריים: ישנם חפצים מ- k סוגים שונים. מס' הדרכים לבנות סידרה המורכבת מ-

$$\binom{n}{n_1, \dots, n_k} = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \dots n_k!} \quad \text{הוא } k \text{ חפצים מסוג } n_1, \dots, n_k$$

7. בעיה שקולה לסעיף (6): מס' הדרכים לחלק n_1 חפצים מסוג 1, $\dots$, n_k חפצים מסוג k לתוך $n_1 + \dots + n_k$ תאים. תכולת כל תא היא חפץ אחד.

8. דוגמא: מס' המילים שניתן להרכיב משתי אותיות A, שלוש אותיות B, ושלוש אותיות C הוא $\frac{8!}{2!3!3!}$.

9. הכללה של משפט הבינום: $(x_1 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} \binom{n}{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \dots x_k^{n_k}$.

10. עקרון ההכלה וההדחה, $k = 2$: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$. דוגמא.

11. עקרון ההכלה וההדחה, $k = 3$: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$. דוגמא.

12. עיקרון ההכלה וההדחה ל- k קבוצות:

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|$$

13. אי סדר מלא של 1 עד n הוא תמורה של 1 עד n שבה כל מס' איננו במקומו. דוגמא: הצפנות על ידי החלפת אותיות (א"ת ב"ש, צופן יוליוס קיסר).

14. מס' אי הסדרים המלאים של 1 עד n הוא $n! \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$.

15. דוגמא: ארבעה עיגורים לוקחים ארבעה ארנקים. מס' הדרכים שבהם אף אחד מהם לקח את ארנקו הוא 9.

16. **עיקרון שובך היונים**: יהיו A, B קבוצות סופיות, $|A| > |B|$, אזי פונקציה $f: A \rightarrow B$ איננה חח"ע. למעשה, יש $b \in B$ שיש לו לפחות $|A|/|B|$ מקורות.

17. דוגמא: 9 נקודות בריבוע 2×2 אזי ישנן 3 מבין נקודות אילו עם מרחק ביניהן $\geq \sqrt{2}$.
דוגמא: אם בסדרה $a_1, \dots, a_k$ מופיעים $\sqrt{k}$ או פחות ערכים, אז יש ערך שחוזר על עצמו לפחות $\sqrt{k}$ פעמים בסדרה.

הרצאה 10

נוסחאות נסיגה

1. פונקציה $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow B$ היא מוגדרת **רקורסיבית** אם הערכים $f(0), \dots, f(k-1)$ נתונים, ולכל $f(n), n \geq k$ מוגדרת כביטוי ב- $f(n-1), \dots, f(n-k)$. **דוגמא:** סדרת פיבונצ'י.
2. דוגמא: $f(n) =$ מס' הסדרות מאורך n , כל איבר הוא 0, 1, או 2 ומס' האפסים הוא זוגי.

$$f(n) = \frac{3^n + 1}{2}$$
3. **משוואת הפרשים מסדר k** היא ביטוי מהצורה $F[f(n+k), f(n+k-1), \dots, f(n)] = 0$.
4. **פתרון המשוואה** הוא פונקציה $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ המקיימת את המשוואה.
5. **משוואת הפרשים ליניארית מסדר k** היא משוואה מהצורה

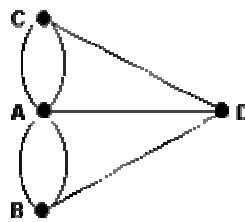
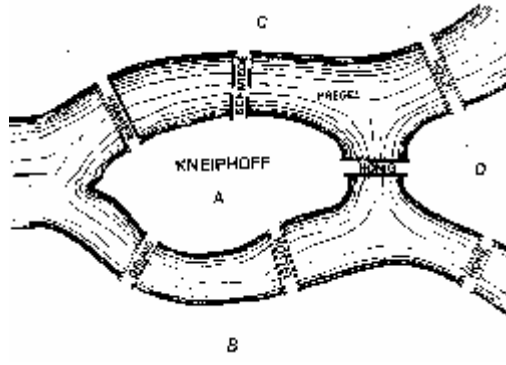
$$f(n+k) = a_1 f(n+k-1) + a_2 f(n+k-2) + \dots + a_k f(n) + g(n)$$
 כאשר $a_1, \dots, a_k$ הם קבועים. אם $g(n) = 0$, המשוואה נקראת **הומוגנית**.
6. **הפולינום האופייני** של המשוואה הליניארית בסעיף (3) הוא $p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \dots - a_k$.
המשוואה האופיינית של המשוואה היא $p(x) = 0$.
7. **תנאי התחלה:** נתונים ערכים של $f(0), \dots, f(k-1)$.
8. **מקרה א' - כאשר יש למשוואה האופיינית k פתרונות ממשיים שונים $x_1, \dots, x_k$:** הפתרון של המשוואה ההומוגנית בסעיף (3) הוא $f(n) = c_1 x_1^n + \dots + c_k x_k^n$.
9. דוגמא: סדרת פיבונצ'י $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$, תנאי התחלה $f(0) = f(1) = 1$.
10. **מקרה ב' - כאשר x_i הוא שורש ממשי עם ריבוי d , דהיינו $p(x) = (x - x_i)^d q(x)$ כאשר $q(x_i) \neq 0$:** התרומה של x_i לפתרון היא $c_0 x_i^n + c_1 n x_i^{n-1} + \dots + c_{d-1} n^{d-1} x_i^{n-d+1}$.
11. דוגמא: $f(n+3) = -5f(n+2) - 3f(n+1) + 9f(n)$ כאשר $f(0) = 2, f(1) = -5, f(2) = 28$.
12. **משוואה לא הומוגנית:** פתרון כללי של משוואה לא הומוגנית הוא $h(x) + u(x)$ כאשר $h(x)$ הוא הפתרון של המשוואה ההומוגנית המתאימה, ו- $u(x)$ הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית.
13. **פתרון פרטי למקרה שבו $g(n) = c$ היא פונקציה קבועה ו- $a_1 + \dots + a_k \neq 1$:**

$$u(n) = \frac{c}{1 - (a_1 + \dots + a_k)}$$
 הוא פתרון פרטי של המשוואה הלא-הומוגנית.
14. **דוגמא:** $f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n) + 7$ כאשר $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הרצאה 11

תורת הגרפים – מסלולי אוילר

1. הנהר פרגל וגשרי קניגסברג.



2. גרף (לא מכוון בלי לולאות) $G = (V, E)$, קדקדים, צלעות.

3. וריאציות: גרף מכוון/בלתי מכוון, עם/בלי לולאות.

4. מולטיגרף (כולל כל הוריאציות כנ"ל).

5. גרף $G' = (V', E')$ הוא תת-גרף של G אם $V' \subseteq V$ ו- $E' \subseteq E$.

6. סימון: $n(G) = |V|$, $e(G) = |E|$.

7. שכן של קדקד v , דרגת קדקד v = מס' השכנים של v $\deg(v)$.

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2e(G) \quad 8.$$

9. מסלול מאורך k $(v_0, v_1, \dots, v_k) = k$ כאשר כל $v_i \in V$. מסלול פשוט, מעגל, מעגל פשוט.

10. גרף קשיר, מרכיבים קשירים.

11. מסלול אוילריני, מעגל אוילריני, גרף אוילריני, ואוילריני למחצה. דוגמאות.

12. אם $\deg(v)$ זוגית לכל $v \in V$ ואם $\deg(v_0) > 0$ אזי v_0 שייך למעגל.

13. משפט אוילר: בגרף G יש מעגל אוילר אם ורק אם כל דרגות הגרף זוגיות.

14. בגרף G יש מסלול אוילר אם ורק אם כל דרגות הקודקודים בגרף זוגיות פרט לשני קודקודים.

15. מעגל המילטוני, גרף המילטוני. דוגמא: כדור רגל קטן=דודקהדר.

הרצאה 12

משפחות מיוחדות של גרפים

1. גרף שלם K_n .
2. $e(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$.
3. גרף דו-צדדי $G = (V_1, V_2, E)$. גרף דו-צדדי שלם $K_{n,m}$.
4. $e(K_{n,m}) = nm$.
5. עץ הוא גרף קשיר בלי מעגלים. יער, עלה.
6. אם G עץ אזי $e(G) < n(G)$.
7. בכל עץ בעל יותר משני קודקודים יש לפחות שני עלים.
8. התנאים הבאים שקולים עבור גרף G עם n קודקודים:
א. G עץ.
ב. אין ב- G מעגלים והוא מקיים $e(G) = n(G) - 1$.
ג. G קשיר ומקיים $e(G) = n(G) - 1$.
9. מסקנה: אם $e(G) \geq n(G) \geq 3$ אזי קיים מעגל ב- G .

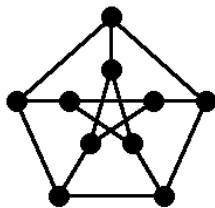
גרפים מישוריים

10. גרף מישורי.
11. אם חותכים את הצלעות של גרף מישורי במספריים, המישור מתחלק לאיזורים הנקראים **פאות** או **תחומים**.
12. תהי F פאה בגרף מישורי. **הדרגה** של F , מסומנת $d(F)$, היא האורך מינימלי של מעגל המכיל את כל צלעות F . דוגמא.
13. יהי G גרף מישורי, אזי $\sum_F d(F) = 2e(G)$.
14. יהי G גרף קשיר מישורי. אם $n(G) \geq 3$ אזי $d(F) \geq 3$ לכל פאה F .
15. **נוסחת אוילר**: אם G קשיר ומישורי אזי $n - e + f = 2$.
16. יהי G גרף קשיר מישורי. אזי $e(G) \leq 3n(G) - 6$.
17. מסקנה: K_5 איננו מישורי.
18. אין משולשים בגרף דו-חלקי.
19. יהי G גרף קשיר מישורי דו-חלקי. אזי $e(G) \leq 2n(G) - 4$.
20. מסקנה: $K_{3,3}$ איננו מישורי.
21. **צמצום** של גרף G הוא הסרת צלע $e = \{x, y\}$, הסרת הקודקוד y , ושינוי כל צלע $\{v, y\}$ ל- $\{v, x\}$.

22. משפט (קורטובסקי-וגנר). גרף G איננו מישורי אם ורק אם או K_5 או $K_{3,3}$ מתקבל מתת-גרף של

G ע"י מס' סופי של צמצומים.

23. הגרף של פיטרסון :



$d(v) = 3$ לכל קדקד v . אין משולשים ואין מרובעים.
מסקנה : הגרף של פיטרסון איננו מישורי.