

6. אינטגרציה נומרית

הבעיה: רוצים לחשב $\int_a^b f(x)dx$

I. שיטת הטורפז:

מחלקים את הקטע $[a, b]$ ל- n תת-קטעים בעלי רוחב h : $hn = b-a$. בכל תת-קטע עושים קירוב ל- f ע"י ישר.

$$h \cdot \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2} = \text{שטח אחרי הקירוב} = \text{שטח טורפז}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2} \cdot [f(a) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b)]$$

הקירוב לאינטגרל:

כמה הקירוב טוב?

טעות לפס אחד: בכל תת-קטע עושים ביון ל- $f(x)$ ע"י קו ישר:

$$|f(x) - p(x)| \leq |M(x - \alpha)(x - \beta)|$$

$$\text{error} \leq |M| \cdot \int_a^b (x - \alpha)(\beta - x)dx = \frac{|M|}{6} h^3$$

טעות ב-n פסים:

$$\frac{|M|}{6} h^3 \cdot n = \frac{|M|}{6} h^2 \cdot (b-a) = O(h^2)$$

השגיאה בטורפז:

$$E_{T_n} = -\frac{h^2}{12} \cdot (b-a) f''(\theta) = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot f''(\theta), \quad \theta \in (a, b)$$

II. כלל סימפטון:

על כל זוג קטעים עושים קירוב ל- f ע"י פרבולה.

הקירוב:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3} \cdot [f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + 4f(a+3h) + 2f(a+4h) + \dots + 4f(b-h) + f(b)]$$

השגיאה בסימפטון:

$$E_{S_n} = -\frac{h^4}{180} \cdot (b-a) f^{(4)}(\theta) = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} \cdot f^{(4)}(\theta), \quad \theta \in (a, b)$$

III. ביון רומברג:

שימוש ב- $I_n, I_{2n}, I_{4n}, I_{8n}$ וכו' ($I_{\alpha n} - I_{\alpha n}$) קירוב ל- I ע"י טורפז עם α צעדים).

h^2 טעות

I_n

h^4 טעות

h^6 טעות

h^8 טעות

$$I_{2n} \quad I_{2n}^{(2)} = \frac{4I_{2n} - I_n}{3}$$

$$I_{4n} \quad I_{4n}^{(2)} = \frac{4I_{4n} - I_{2n}}{3} \quad I_{4n}^{(3)} = \frac{16I_{4n}^{(2)} - I_{2n}^{(2)}}{15}$$

$$I_{8n} \quad I_{8n}^{(2)} = \frac{4I_{8n} - I_{4n}}{3} \quad I_{8n}^{(3)} = \frac{16I_{8n}^{(2)} - I_{4n}^{(2)}}{15} \quad I_{8n}^{(4)} = \frac{64I_{8n}^{(3)} - I_{4n}^{(3)}}{63}$$

$$I_{kn}^{(j)} = \frac{4^{j-1} I_{kn}^{(j-1)} - I_{\frac{k}{2}n}^{(j-1)}}{4^{j-1} - 1}$$

$$x_i = a + ih, \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad \text{באופן כללי, קירוב לאינטגרל הוא}$$

בטרפז המשקולות הן: 1, 2, 2, 2, ..., 1
 בסימפסון המשקולות הן: 1, 2, 4, 2, ..., 1

IV. תרבוע גאוס:

משפט: תהי פונקציה המשקל $w(x)$ על $[a, b]$ ו- n מספר טבעי. אזי קיימת בדיוק בחירה אחת של קודקודים $x_1, x_2, \dots, x_n$ ומשקולות $w_1, \dots, w_n$ כך שהקירוב $\int_a^b w(x) f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$ מדויק לפולינומים $f(x)$ מדרגה עד $2n-1$.

איך מוצאים את $\{w_i\}, \{x_i\}$?
 x_i הם שורשי הפולינום $P_n(x)$ $p_i(x)$ פולינומים אורתוגוניים ביחס ל- $w(x)$ ב- $[a, b]$.

$$w_i = \int_a^b w(x) L_i(x) dx, \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (L_i(x) - \text{הפונקציה הראשית של לגרנג'})$$