5. תורת הקירובים:

א. קירוב נקודות:

הבעיה: נתונות n+1 נקודות. מחפשים $f(x)$ כך ש-$f(x_i) \approx y_i$

I. $f(x)$ פולינום ליניארי:

$f(x) = Ax + B$. איך בוחרים A, B?

שיטת הריבועים הזעירים:

נבחר A, B כך ש-$S = \sum_i (y_i - Ax_i - B)^2$ מינימלי.

נמצא את המינימום של S ע"י:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = \frac{\partial S}{\partial B} = 0$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial A} = \sum_i -2x_i(y_i - Ax_i - B) = \sum_i x_i y_i - A\sum_i x_i^2 - B\sum_i x_i$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial B} = \sum_i -2(y_i - Ax_i - B) = \sum_i y_i - A\sum_i x_i - B\sum_i 1$$

נבחר A, B לפי:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}}$$

הערה: יש לזה פתרון יחיד שכן det > 0.

הכללות:

1. אם רוצים $y = Ax^2 + Bx + C$ ניתן לבחור A, B, C כך ש-$S = \sum_i (y_i - Ax_i^2 - Bx_i - C)^2$ מינימלי.

$$\boxed{\begin{pmatrix} \Sigma x_i^4 & \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 \\ \Sigma x_i^3 & \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i \\ \Sigma x_i^2 & \Sigma x_i & \Sigma 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma x_i^2 y_i \\ \Sigma x_i y_i \\ \Sigma y_i \end{pmatrix}}$$

2. ניתן לתת לכל נקודה x_i משקל w_i כך ש-$\sum_i w_i = 1$. ככל ש-w_i גדול יותר ← (x_i, y_i) חשובה יותר. נרצה $S_w = \sum_i w_i (y_i - Ax_i - B)^2$ מינימלי.

3. ניתן לקחת

$$S = \left\| y - Ax - B\begin{pmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

ב. קירוב עקומות:

הבעיה: נתון $f(x)$ על הקטע [a, b]. צריך למצוא פולינום p(x) מדרגה עד n כך ש-$f(x) \approx p(x)$ על הקטע [a,b]

נרצה p(x) כך ש-

$$S_w = \int_a^b w(x)(f(x) - p(x))^2 dx$$

w(x) היא ***פונקציית משקל*** על [a, b], w(x) > 0, $\int_a^b w(x)dx = 1$

פולינומים אורתוגונליים:

משפט: לכל קטע [a, b] ולכל פונקציית משקל w(x) ניתן למצוא סדרה של פולינומים $p_0(x), \ldots, p_n(x)$ כך ש-

1. $p_i(x)$ מדרגה i.
2. המקדם של x^i ב-$p_i(x)$ הוא 1.
3. $i \neq j,\ \int_a^b w(x)p_i(x)p_j(x)dx$

הפולינומים:

$$p_n(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} k_i p_i(x)$$

$$\boxed{k_m = \frac{-\int_a^b w(x)p_m(x)x^n dx}{\int_a^b w(x)p_m^2(x)dx}}$$

הערה: סדרה של פולינומים $p_0(x), p_1(x), \ldots$ המקיימת רק את תנאים 1 ו-3 נקראת ***מערכת של פולינומים אורתוגונליים*** ביחס למשקל w(x) על [a, b].

אם דורשים $\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx = 1$ לכל I, אזי המערכת היא ***אורתונורמלית***.

דוגמאות של פולינומים אורתוגונליים: ***ר' דפים***

1. Legendre.
2. Tchebyshev.
3. Laguerre.
4. Hermite.

העברת קטעים: (למשל מ-[0, 1] ל-[-1, 1]):

$$t \in [a,b] \mapsto x \in [c,d]$$

$$x = \alpha t + \beta$$

$$\begin{cases} c = \alpha a + \beta \\ d = \alpha b + \beta \end{cases}$$

חזרה לבעיית הקירובים: $f(x) \approx p(x)$

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i p_i(x)$ $p_i(x)$ פולינומים אורתוגונליים על [a, b] ביחס ל-w(x).

$$\boxed{a_i = \frac{\int_a^b w(x)p_i(x)f(x)dx}{\int_a^b w(x)p_i^2(x)dx}}$$

בניית הפולינומים האורתוגונליים ויחסי נסיגה:

משפט: יהיו $p_0(x), p_1(x), \ldots$ פולינומים אורתוגונליים ביחס למשקל w(x) על הקטע [a, b]. אזי קיים יחס נסיגה מהצורה $xp_n(x) = \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x)$.