4. ביון

<u>הבעיה:</u> נתונות n+1 נקודות $(x_n, y_n), \ldots, (x_0, y_0)$, $x_0 < \ldots < x_n$. צריך למצוא פונקציה כך ש-$f(x_i) = y_i$.

ביון פולינומי:

<u>משפט:</u> קיים בדיוק פולינום אחד $p(x)$ <u>מדרגה עד n</u> כך ש-$p(x_i) = y_i$, $x_0 < \ldots < x_n$.

שיטות לבניית הפולינומים:

1. השיטה הישירה: $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx_n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$, $y_j = p(x_j) = \sum_{i=0}^{n} a_ix_j^i$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & & x_0^n \\ 1 & x_1 & & & x_1^n \\ & & & & \\ 1 & x_n & x_0^2 & & x_n^n \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ y_n \end{pmatrix}$$

ניתן לפתור אם $|M| \neq 0$
M היא מטריצת ***vander monde* ומצבה רע**.

2. שיטת לגרנג':

הפולינום הראשי של לגרנג': $L_j(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$ $\quad L_j(x_k) = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$

במקרה הכללי רוצים: $p(x_k) = y_k$,k = 0, 1, …, n, $\quad p(x) = \sum_{j=0}^{n} y_jL_j(x)$

כמו כן מתקיים שאם $f^{(n+1)}(x)$ קיימת ב-$[a, b]$ אז לכל $x \in [a, b]$ קיימת θ_x בקטע הפתוח $\min\{x_0, \ldots, x_n, x\} < \theta_x < \max\{x_0, \ldots, x_n, x\}$ כך ש-

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta_x)}{(n+1)!} \cdot \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$$

חישוב פולינום:

1. $a_0 + a_1x + \ldots a_nx_n$ דורש $O(2n)$ פעולות כפל.
2. <u>אלגוריתם Horner:</u> $[a_0 + x[a_1 + x\{x_2 + x(a_3 + \ldots + (a_{n-1} + xa_n) \ldots)\}]$ דורש $O(n)$ פעולות כפל.
3. $p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + \ldots c_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x-x_{n-1})$ גם ניתן לחישוב ב-$O(n)$ פעולות כפל.

3. שיטת ניוטון: שיטת הפרשים מחולקים:

$$y_{ij} = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

$$y_{ijk} = \frac{y_{ij} - y_{jk}}{x_i - x_k}$$

$$y_{ijkl} = \frac{y_{ijk} - y_{jkl}}{x_i - x_l}$$

$$y_{ijklm} = \frac{y_{ijkl} - y_{jklm}}{x_i - x_m}$$

x_0	y_0				
		y_{10}			
x_1	y_1		y_{210}		
		y_{21}		y_{3210}	
x_2	y_2		y_{321}		y_{43210}
		y_{32}		y_{4321}	
x_3	y_3		y_{432}		
		y_{43}			
x_4	y_4				

$p(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1)\ldots \quad c_0 = y_0, c_1 = y_{10}, c_2 = y_{210}, c_3 = y_{3210}, c_4 = y_{43210}, \ldots$

<u>הטעות בפולינום הביון:</u> $p(x)$ פולינום הביון, $f(x)$ פונקציה אחרת העוברת דרך הנקודות וגזירה n+1 פעמים.
לכל $x_0 \leq x \leq x_n$ קיים γ בין x_0 ל-x_n כך ש-

$$|f(x) - p(x)| = \frac{f^{(n+1)}(\gamma)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

אם $f^{(n+1)}$ חסומה, אזי הביטוי הנ"ל חוסם את הטעות של ה-x-ים בין הנקודות.

<u>הערה:</u> צריך שנקודות הקלט תהיינה יותר צפופות לקראת סוף הקטע. זאת כדי שגודל הטעות תהיה קטנה יותר. הנוסחה לכך היא: $x_i = \frac{n}{2}\cos(\frac{(n-i)\Pi}{n})$

:*Splines*

1. ***Linear Splines***: מציירים קו בין הנקודות. צריך לכתוב נוסחה שונה עבור כל תת-קטע:

$$f(x) = y_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + y_{i-1} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \quad , x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n$$

2. ***Cubic Splines***:

הרעיון: בכל קטע $[x_{i-1}, x_i]$ הפונקציה היא פולינום מדרגה עד 3: $f(x) = a_i + b_ix + c_ix^2 + d_ix^3$.

הערות:
1. לכל קטע יש 4 מקדמים. יש n קטעים ← 4n מקדמים.
2. יש 2 הגבלות על כל קטע: $f(x_i) = y_i,\ f(x_{i-1}) = y_{i-1}$ ← יש רק 2n דרגות חופש.
3. תנאי נוסף: רציפות f' ← $2(n-1)$ תנאים.
4. ***Natural Cubic Spline***: עוד 2 תנאים: $f''(x_0) = f''(x_n) = 0$.

בניית *Cubic Spline*:

$f''(x_i) = c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. עבור *natural spline*: $c_0 = c_n = 0$.

$$f''(x) = c_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + c_{i-1} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} \quad , x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1, \ldots, n$$

f'' היא *linear spline*.

עושים פעמיים אינטגרל כדי לקבל את f ודורשים $f(x_i) = y_i,\ f(x_{i-1}) = y_{i-1}$.

מקבלים:

$$f(x) = y_i \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + y_{i-1} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + ((x + x_i - 2x_{i-1}) \cdot c_i - (x + x_{i-1} - 2x_i) \cdot c_{i-1}) \cdot \frac{(x - x_i)(x - x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})}$$

$$(x - x_{i-1}) \cdot c_{i-1} + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) \cdot c_i + (x_{i+1} - x_i) \cdot c_{i+1} = 6\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right)$$