3. אלגברה ליניארית נומרית

הבעיה: לפתור $Ax = b$.

3 מקרים:

א. יותר משוואות ממשתנים (בד"כ $n > m$): יש יותר מדי אילוצים ואי-אפשר למצוא פתרון. מחפשים x כך ש-$Ax \approx b$

ב. יותר משתנים ממשוואות (בד"כ $m > n$): הרבה מאוד פתרונות. אלימינציה: איזה פתרון הכי מתאים למטרה.

ג. מספר מתאים של משוואות (בד"כ $n = m$): $Ax = b$:

אם A לא סינגולרית ($|A| \neq 0$) ← קיים הופכי ויש פתרון יחיד.

אם A סינגולרית, $|A| = 0$ ← 1. לא קיים פתרון ומחפשים קירוב.
2. קיימים אינסוף פתרונות – אופטימיזציה.

דרכים לפתור $Ax = b$, $|A| \neq 0$:

א. מציאת A^{-1} וחישוב $A^{-1}b$.

בעיה: 1. חישוב A^{-1} לא יציב כאשר $|A|$ קטן.
2. טרחה יתרה בחישוב A^{-1}.

ב. ***שיטת פירוק:***

הערה: 1. אם A משולשית עליונה $\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$ ניתן לפתור ע"י הצבה לאחור.

2. כנ"ל עבור A משולשית תחתונה.

3. מטריצה A היא ***אורתוגונלית*** אם $AA^T = I$ ואז הפתרון הוא $x = A^Tb$.

I. $A = QR$, כאשר Q אורתוגונלית, R משולשית עליונה.

II. ***$PA = LU$***, כאשר L משולשית תחתונה, U משולשית עליונה.

$Ax = b \rightarrow PAx = LUx = Pb$,
if $Ux = Y$, then solve: $LY = Pb$, and then solve $Ux = Y$.

חילוץ גאוס: בחילוץ גאוס לפעמים צריך ***pivoting*** = החלפת סדר המשוואות כך שהמקדם של המשתנה אותו ברצוננו לחלץ באותו שלב יהיה הגדול ביותר (בערך מוחלט).

טענה: אם עושים *pivoting* אזי חילוץ גאוס הוא תהליך מהיר ועמיד לפתרון $Ax = b$.

כמה פעולות עושים בחילוץ גאוס? (סופרים רק פעולות כפל/חילוק):

חילוץ x_1 ← n^2 פעולות
חילוץ x_2 ← $(n-1)^2$ פעולות

סה"כ: $O(n^3)$.

טענה: שיטת גאוס היא שיטת פירוק (חילוץ גאוס שקול למציאת פירוק LU).

משפט: לכל מטריצה A^{nxn} קיימות מטריצות L, U, P כך ש:

1. U משולשית עליונה.
2. L משולשית תחתונה עם 1ים באלכסון.
3. P מטריצת תמורה (אחד יחיד בכל שורה ועמודה).
4. $LU = PA$.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\ 0 & \\ -m_{21} & 1 & 0\ 0 & \\ -m_{31} & & 1 & \\ & & & 0 \\ -m_{n1} & -m_{n2} & & 1 \end{pmatrix}$$

m_{ij} = הכופל שבו מכפילים שורה j כי לאפס רכיב במקום ה-(i,j)

$\boxed{[L,U,P]=lu(A)}$

מקרים מיוחדים:

1. ***A סימטרית*** ($A^T = A$) ***וחיובית ממש*** (לכל x: $x^T Ax \geq 0$ ו- $x^T Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

$\boxed{R = chol(A)}$

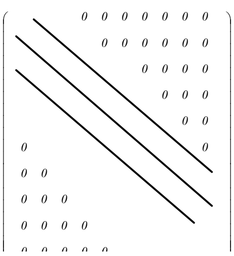
פירוק חולסקי: $A = R^TR$ ← הורדת מספר הפעולות ב-1/2.

מפירוק LU ניתן לשחזר את פירוק חולסקי: $A = LU = LDU'$, כאשר D – אלכסונית עם האלכסון של U, U' – משולשית עליונה עם 1ים באלכסון.

$$LDL^T = LDU' = A = A^T = U'^T D^T L^T = U'^T DL^T = (L\sqrt{D})(\sqrt{D}L^T) = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^T = R \cdot R^T$$

חיובית ממש (הגדרה נוספת): אם כל הדטר' של המינורים עד וכולל הדטר' של המטריצה כולה חיוביים ממש, או: כל הע"ע של A גדולים מ-0.

2. ***מטריצות בעלות פסים*** (*stripping matrices*): קיים n קטן (ביחס למימד) כך ש-$A_{ij} = 0$ כאשר $|i-j| > n$.



טענה: קיים פירוק שהוא גם בעל פסים $A = LU$, $L_{ij} = U_{ij} = 0$ עבור $|i-j| > n$.
← הורדת מספר הפעולות ל-$n*dim$, כאשר dim = המימד (במקום dim^3).

3. ***sparse matrices*** (עם הרבה אפסים).

מצבי מטריצה:

א. **מצב טוב**: טעות קטנה בקלט ← טעות קטנה בפלט.

ב. **מצב רע**: טעות קטנה בקלט ← טעות גדולה בפלט.

נורמות של וקטורים: $\|\ \| : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ***נורמה וקטורית*** אם:

1. $\|x\| \geq 0$ ו- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|ax\| = |a| * \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

אם $Ax = b$ ו-$A\tilde{x} = \tilde{b}$ (עושים שינוי ב-b ומקבלים שינוי ב-x):

טעות יחסית בקלט: $\dfrac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$ ***טעות יחסית בפלט:*** $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$

דוגמאות של נורמות:

1. $\|x\|_1 = \Sigma |x_i|$
2. $\|x\|_2 = \sqrt{\Sigma x_i^2}$
3. $\|x\|_p = \sqrt[p]{\Sigma |x_i|^p}$
4. $\|x\|_\infty = \max |x_i|$

נורמות של מטריצות: $\|\ \| : \mathbf{R}^{nxm} \to \mathbf{R}$ ***נורמה למטריצות nxm*** אם:

1. $\|A\| \geq 0$ ו- $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = \vec{0}$
2. $\|aA\| = |a| * \|A\|$
3. $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

אם יש לנו נורמות למטריצות <u>מכל גודל</u> אזי זה ***משפחה של נורמות*** אם: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

דוגמאות של נורמות:

1. $\|A\|_1 = \max(\Sigma_i |a_{ij}|)$
2. $\|A\|_2 = \max\limits_{\substack{x \in R^m \\ x \neq 0}} \dfrac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$
3. $\|A\|_\infty = \max(\Sigma_j |a_{ij}|)$
4. $\|A\|_{fro} = \sqrt{\Sigma_{i,j} a_{ij}^2}$
5. $\|A\|_t = \max\limits_{\|x\|_t > 0} \dfrac{\|Ax\|_t}{\|x\|_t} = \max\limits_{\|x\|_t = 1} \|Ax\|_t$ x וקטור.

```
norm(A,1)
norm(A,2) = norm(A)
norm(A, inf)
norm(A, 'fro')
```

<u>הערה</u>: אם המטריצה סימטרית אזי $\|A\|_1 = \|A\|_\infty$

רוצים למצוא $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ אם ידוע $\dfrac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$

← **גודל השגיאה:** $\boxed{\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \dfrac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}}$

$$\frac{1}{\|x\|} \leq \frac{\|x\|}{\|b\|} \Rightarrow \frac{1}{K(A)} \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|}$$

$$\frac{1}{K(A)} \cdot \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{\|b - \tilde{b}\|}{\|b\|} \leq K(A) \cdot \frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$$

$$\boxed{K(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}}$$

$$\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1}$$

הערות: 1. ניתן להוכיח שאם $Ax = b$, $\underline{Ax} = b$ (משנים את A במקום את b) אזי: $\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \le K(A) \cdot \frac{\|A - \tilde{A}\|}{\|A\|}$
כלומר, $K(A)$ מודד את הרגישות לשינוי גם ב-b וגם ב-A.
2. אם עובדים ב-n ספרות דיוק ו-$K(A) = 10^k$ ← ניתן לסמוך רק על n - k ספרות בפתרון הבעיה $Ax = b$

$Ax = b$: שיטות רקורסיביות:

$A = L + D + U$: L – החלק התחתון של A, D – האלכסון של A, U – החלק העליון של A

א. שיטת *Jacoby*: $Ax = (D + M)x = b$, D – מטריצה אלכסונית, M – אפסים באלכסון.

השיטה: בוחרים x_0 ומייצרים x_n אחרים לפי: $x_{n+1} = D^{-1}b – D^{-1}Mx_n$.

הערות: 1. השיטה עובדת כאשר M "קטן" ביחס ל-D, למשל: $| a_{ii} | > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} | a_{ij} |$
2. סוג הרקורסיה הוא לינארי: $x_{n+1} = \beta – Hx_n$ (β – וקטור, H מטריצה).

איטרציית יעקובי:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}}$$

שקול: $x^{(k+1)} = D^{-1}b – D^{-1}(L + U)x^{(k)}$, $H = C_J = -D^{-1}(L + U)$

תנאי התכנסות:

(1) $|H - \lambda I| = 0$

(2) $max|\lambda I| < 1$

ב. שיטת *Gauss-Seidel*: $Ax = (D + L + U)x = b$,

השיטה: בוחרים x_0 ומייצרים x_n אחרים לפי: $x_{n+1} = (D + L)^{-1}b – (D + L)^{-1}Ux_n$.

הערות: 1. שיטה זו מתכנסת טוב יותר מ-Jacoby.
2. בשיטה זו אם $U = 0$ ← פתרון מדויק. ב-Jacoby אם $M = 0$ ← פתרון מדויק.

איטרציית גאוס-סיידל:

$$\boxed{x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}}$$

שקול: $x^{(k+1)} = (L + D)^{-1}b – (L + D)^{-1}Ux^{(k)}$, $H = C_{GS} = -(L + D)^{-1}U$

תנאי התכנסות:

(1) $|H - \lambda I| = 0$

(2) $max|\lambda I| < 1$

רקורסיות לינאריות: $X_{n+1} = \beta + Hx_n$

משפט: הרקורסיה הלינארית מתכנסת (בלי הגבלה על תנאי ההתחלה x_0) לפתרון היחיד של $X_{n+1} = \beta + Hx_n$ אם"ם ה***רדיוס הספקטרלי*** של H קטן מ-1.

רדיוס ספקטרלי: הערך העצמי הגדול ביותר בערך מוחלט: $\rho(c) = max|\lambda_i|$

ערך עצמי: λ כך ש- $| H – \lambda I| = 0$ (יש עד n ערכים עצמיים; n = המימד).

וקטור עצמי: לכל ע"ע λ קיים (לפחות) וקטור אחד שאינו 0 כך ש-$Hv = \lambda v$.

eig(H)

$E = eig(H) – H$ מחזיר וקטור עם הע"ע של H.

$[V, D] = eig(H)$ - D: מטריצה שבאלכסונים נמצאים הע"ע.

V: $HV = VD$:מטריצה כך שהעמודות שלה מקיימות (כל עמודה = הוקטור העצמי).