__88-524-תרגיל 5-פתרון:__

1. א. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את 1,2,3,4 ל- -5,-3,-2,0 בהתאמה?

ב. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי RP^1 לעצמו השולחת את הקבוצה {1,2,3,4} לקבוצה {-5,-3,-2,0}? אם כן, מצא אותה.

$R(1,2,3,4)=\frac{2}{1}\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$, אם ניקח בחשבון את כל הערכים שיכולים להתקבל עבור ארבעתם כפי

הוכחנו,נקבל: $4,\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}},-\frac{3}{2},-\frac{2}{3}=1-\frac{4}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{3}$

$R(-5,-3,-2,0)=\frac{3}{1}\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$, אם ניקח בחשבון את כל הערכים שיכולים להתקבל עבור ארבעתם כפי

הוכחנו,נקבל: $\frac{9}{4},\frac{4}{9}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{9}{5}},-5,-\frac{1}{5}=1-\frac{9}{5},\frac{5}{9},\frac{9}{5}$

ניתן לראות כי אין ביניהם שום ערך כפול משותף ולכן אין העתקה פרוייקטיבית.

ג. האם קיימת העתקה פרוייקטיבית מ RP^1 לעצמו השולחת את 0 ל ∞, את 1 ל 5, את 3 ל- 3.5 ואת 2 ל 3?

אם קיימת אז $3/4=R(0,1,3,2)=R(\infty,5,3.5,3)=-4/3$
סתירה.

ד. הוכיחו שקיימת העתקה פרוייקטיבית השולחת את הקבוצה $\{0,1,2,3\}$ לקבוצה $\{\infty,5,3.5,3\}$ ומצאו אותה במפורש (ז"א: a,b,c,d כך ש- $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$).

קיימות כמה כאלו, לדוגמא: $f(x)=\frac{2x+3}{x}$

לאן ההעתקה שולחת את 2? מהן נקודותיה הכפולות אם יש (כלומר,שנשלחות לעצמן).

$$f(2)=3.5$$
$$\text{נקודות כפולות}:$$
$$x=\frac{2x+3}{x}\Rightarrow x^2-2x-3=(x-3)(x+1)=0$$
$$\Rightarrow x_1=3,x_2=-1$$

2. תהיינה D,C,B,A נקודות שונות על הישר הפרוייקטיבי.

א.מתי קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי לעצמו השולחת:

$A \mapsto B, B \mapsto A, C \mapsto C, D \mapsto D$? (ז"א תארו מה המצב היחסי בין כל נקודה לאחרות).

$$R(A,B,C,D) = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD} = R(B,A,C,D) = \frac{BC \cdot AD}{AC \cdot BD} \Rightarrow R = 1/R \Rightarrow R = \pm 1$$

אם R 1: אז D,C או שתיהן בין A ל B או שתיהן מחוץ ל AB.

אם R -1: אז אחד מבין D,C בין A ל B ואחד מהם מחוץ ל AB.

ב. מתי קיימת העתקה פרוייקטיבית מהישר הפרוייקטיבי לעצמו השולחת:

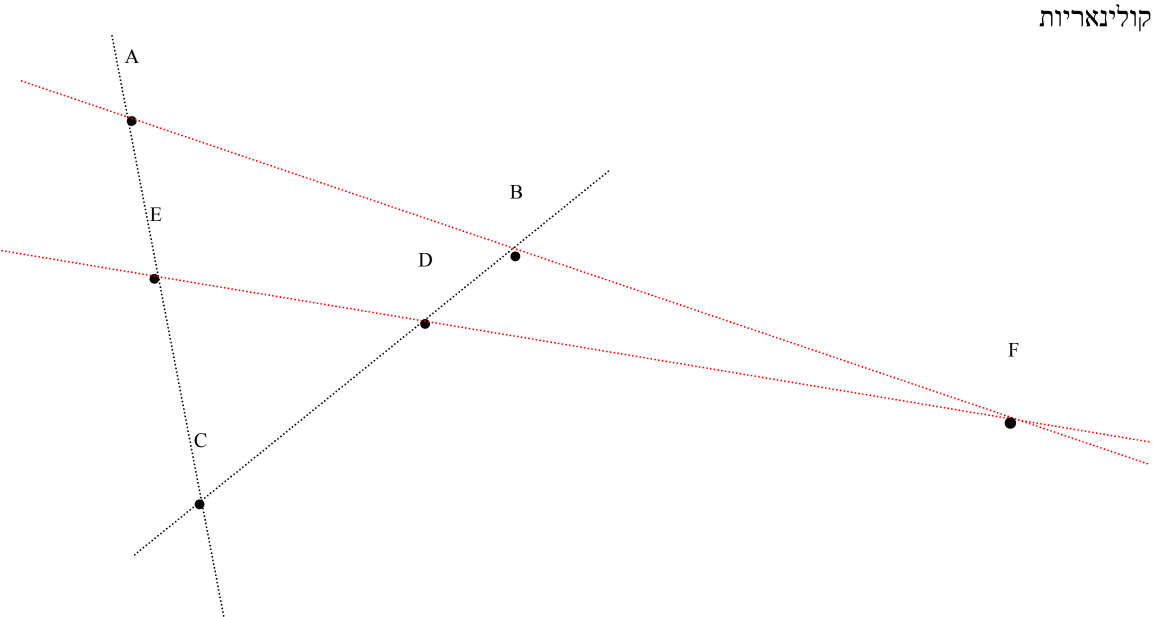
$A \mapsto D, B \mapsto B, C \mapsto C, D \mapsto A$?

$$R(A,B,C,D) = R(D,B,C,A) = 1 - R(A,B,C,D) \Rightarrow R(A,B,C,D) = 0.5$$

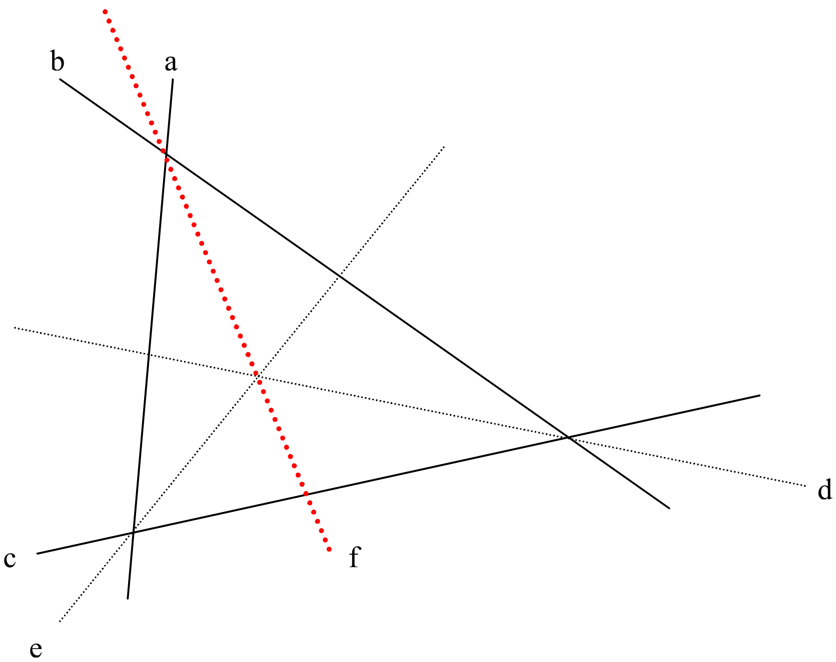
D,C או שתיהן בין A ל B או שתיהן מחוץ ל AB.

3. ציירו ציורים מתאימים לטענות הבאות, נסחו את הטענה הדואלית וציירו גם עבורה:

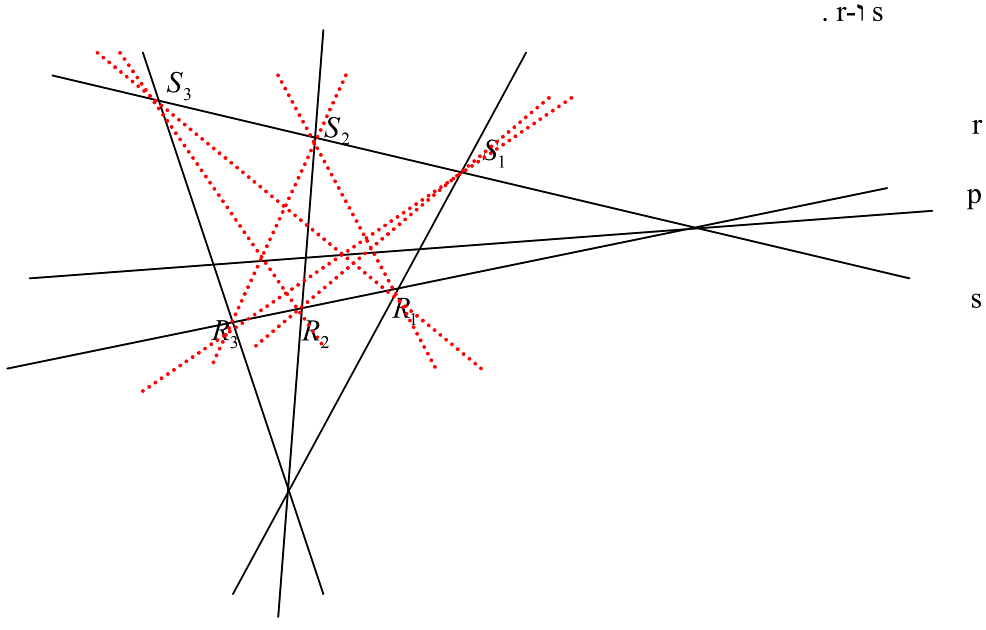
א. C,B,A נקודות שונות לא קולינאריות, D,E נקודות שונות כך ש C,B,D קולינאריות ו- A,E,C קולינאריות. אז יש נקודה F כך ש- F,B,A קולינאריות ו- F,E,D קולינאריות



דואלי: a,b,c ישרים שונים לא קונקורנטיים. d,e ישרים שונים כך ש- c,b,d קונקורנטיים ו- a,e,c קונקורנטיים. אז יש ישר f כך ש- a,b,f קונקורנטיים ו- f,e,d קונקורנטיים.



ב. (משפט פפוס הזעיר): R_1, R_2, R_3 הן נקודות שונות על ישר r , S_1, S_2, S_3 נקודות שונות על ישר s ו- R_1S_1, R_2S_2, R_3S_3 קונקורנטיות בנקודה P. אז הנקודות $R_2S_3 \cap R_3S_2, R_1S_3 \cap R_3S_1, R_1S_2 \cap R_2S_1$ נמצאות על ישר p שהוא קונקורנטי עם s ו-r .



דואלי: r_1, r_2, r_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה R, s_1, s_2, s_3 הם ישרים שונים הנפגשים בנקודה S ו- $r_1 \cap s_1, r_2 \cap s_2, r_3 \cap s_3$ קולינאריות בישר p. אז הישרים

$r_2 \cap s_3 - r_3 \cap s_2,\ \ r_1 \cap s_3 - r_3 \cap s_1,\ \ r_1 \cap s_2 - r_2 \cap s_1$ קונקורנטיים בנקודה P שהיא קולינארית עם R ו- S .