דף תרגילים 5

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 חשבו את אורך העקומה $\alpha(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$ באשר $t \in [0,1]$.

פתרון 1

$$\alpha'(t) = (e^t, -e^{-t}, \sqrt{2})$$

לכן

$$|\alpha'(t)| = \sqrt{e^{2t} + e^{-2t} + 2} = \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} = e^t + e^{-t}$$

לכן אורך העקומה הוא

$$\int_0^1 e^t + e^{-t} dt = e - \frac{1}{e}$$

תרגיל 2 הראו שהעקומות הבאות נתונות בפרמטריזציית אורך קשת, וחשבו את העקמומיות שלהן.

א. $\alpha(s) = \left(\frac{1}{3}(1+s)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-s)^{\frac{3}{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$

ב. $\alpha(s) = \left(\frac{4}{5}\cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5}\cos t\right)$

פתרון 2

א.

$$\alpha'(s) = (\frac{1}{2}\sqrt{1+s}, -\frac{1}{2}\sqrt{1-s}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{1}{4}(1+s) + \frac{1}{4}(1-s) + \frac{1}{2}} = 1$$

כלומר זו אכן פרמטריזצית מהירות יחידה. לכן נוכל לחשב את העקמומיות:

$$\begin{aligned}
|\alpha''(s)| &= \left|\left(\frac{1}{4\sqrt{1+s}}, \frac{1}{4\sqrt{1-s}}, 0\right)\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{16(1+s)} + \frac{1}{16(1-s)}} \\
&= 2^{-\frac{3}{2}}(1-s^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

ב.

$$\alpha'(s) = (-\frac{4}{5}\sin t, -\cos t, \frac{3}{5}\sin t)$$
$$|\alpha'(s)| = \sqrt{\frac{16}{25}\sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25}\sin^2 t} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1$$

עקמומיות:

$$\begin{aligned}|\alpha''(s)| &= \left|\left(-\frac{4}{5}\cos t, \sin t, \frac{3}{5}\cos t\right)\right| \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}\cos^2(t) + \sin^2(t) + \frac{9}{25}\cos^2(t)} \\ &= 1\end{aligned}$$

תרגיל 3

א. מיצאו פרמטריזציית אורך קשת לעקומה $\alpha(t) = (4\cos t, 5 - 5\sin t, -3\cos t)$.

ב. חשבו את העקמומיות $k(s)$ של העקומה מסעיף קודם.

פתרון 3

א.

$$\alpha'(t) = (-4\sin t, -5\cos t, 3\sin t)$$
$$|\alpha'(t)| = \sqrt{16\sin^2 t + 25\cos^2 t + 9\sin^2 t} = 5$$
$$s(t) = \int_0^t 5d\tau = 5t$$
$$t(s) = \frac{s}{5}$$
$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = \alpha(\frac{s}{5}) = (4\cos\frac{s}{5}, 5 - 5\sin\frac{s}{5}, -3\cos\frac{s}{5})$$

ב.

$$\beta'(s) = (-\frac{4}{5}\sin\frac{s}{5}, -\cos\frac{s}{5}, \frac{3}{5}\sin\frac{s}{5})$$
$$\beta''(s) = (-\frac{4}{25}\cos\frac{s}{5}, \frac{1}{5}\sin\frac{s}{5}, \frac{3}{25}\cos\frac{s}{5})$$
$$k(s) = |\beta''(s)| = \sqrt{\frac{1}{25}\cos^2\frac{s}{5} + \frac{1}{25}\sin^2\frac{s}{5}} = \sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

תרגיל 4 מיצאו את העקמומיות של האליפסה $x^2+2y^2=3$.

פתרון 4 נגדיר $F(x,y)=x^2+2y^2-3$. אז

$$|\nabla F| = \left|\begin{pmatrix} 2x \\ 4y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4x^2+16y^2}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$\begin{aligned} D_B(F) &= F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 \\ &= 2(4y)^2 + 4(2x)^2 = 16x^2+32y^2 = 16(x^2+2y^2) = 16\cdot 3 = 48 \\ k &= \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{48}{(4x^2+16y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

תרגיל 5 מיצאו נקודה או נקודות (אם קיימות) של עקמומיות מקסימלית על העקומות הבאות:

א. $3x^2+4y^2=1$

ב. $y=e^x$

ג. $y^2-5+xy=0$

פתרון 5

א. נגדיר $F(x,y)=3x^2+4y^2-1$. אז

$$|\nabla F| = \left|\begin{pmatrix} 6x \\ 8y \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36x^2+64y^2} = \sqrt{1+16y^2}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$\begin{aligned} D_B(F) &= F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 \\ &= 6(8y)^2 + 8(6x)^2 = 384y^2+288x^2 = 96(4y^2+3x^2) = 96 \\ k &= \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{96}{(1+16y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

מקסימום מתקבל כאשר המכנה מינימלי כלומר כאשר $y=0$ כלומר ב־ $(\pm\frac{\sqrt{3}}{3},0)$.

ב. נגדיר $F(x,y)=e^x-y$. אז

$$|\nabla F| = \left|\begin{pmatrix} e^x \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{e^{2x}+1} = \sqrt{y^2+1}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = e^x(-1)^2 = e^x = y$$

לכן עקמומיות

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{y}{(y^2+1)^{3/2}}$$

נחפש נקודות קריטיות

$$k'(y) = \frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}} - y \cdot \frac{3}{2}\sqrt{y^2+1} \cdot 2y}{(y^2+1)^3} = \frac{y^2+1-3y^2}{(y^2+1)^{\frac{5}{2}}} = 0$$

כלומר $2y^2 = 1$ כלומר $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$. זו אכן נקודת מקסימום (למשל לפי טבלה). לסיכום עקמומיות מקסימלית מתקבלת ב־ $(\ln\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

ג. נגדיר $F(x,y) = y^2 - 5 + xy$. אז

$$|\nabla F| = \left|\begin{pmatrix} y \\ 2y+x \end{pmatrix}\right| = \sqrt{y^2+(2y+x)^2} = \sqrt{5y^2+4xy+x^2} = \sqrt{x^2+y^2+20}$$

נחשב את אופרטור בייטמן

$$D_B(F) = F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2 = 0 - 2\cdot y(2y+x) + 2y^2 = -2y^2 - 2xy = 2(y^2+xy) = 10$$

לכן עקמומיות

$$k = \frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3} = \frac{10}{(x^2+y^2+20)^{3/2}}$$

נחפש נקודות קריטיות של $k(x,y)$ על העקומה, כלומר נבודד את $x = \frac{5-y^2}{y}$.

$$k = \frac{10}{(\frac{(5-y^2)^2}{y^2} + y^2 + 20)^{3/2}} = \frac{10}{(\frac{(5-z)^2}{z} + z + 20)^{3/2}}$$

באשר סימנו $z = y^2$ לשם נוחות הגזירה.

הביטוי מקסימלי כאשר המכנה מינימאלי, כלומר כאשר

$$g(z) = \frac{(5-z)^2}{z} + z = \frac{25}{z} - 10 + 2z$$

מינימאלי (עבור $z > 0$).

$$g'(z) = \frac{-25}{z^2} + 2 = 0$$

כלומר $z=\frac{5}{\sqrt{2}}$ וקל לראות למשל ע"י נגזרת שניה שזו אכן נקודת מינימום.

$$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[4]{2}}$$

ומכאן ניתן להציב ולמצוא גם את ערכי x.

תרגיל 6 מיצאו את העקמומיות של עקומת החיתוך של הספירה $x^2+y^2+z^2=4$ עם המישור $x+y+z=1$. [רמז: עקומת החיתוך היא עיגול. מה הרדיוס שלו?]

פתרון 6 רדיוס הספירה 2 ומרכזה ראשית הצירים. לפי משפט פיתגורס, רדיוס עיגול החיתוך בין הספירה למישור הוא $r=\sqrt{2^2-d^2}$ באשר d המרחק ממרכז הספירה (ראשית הצירים) למרכז עיגול החיתוך. מרחק זה הוא מרחק המישור $x+y+z=1$ מהנקודה $(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$. כלומר

$$d=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

כלומר רדיוס עיגול החיתוך הוא $\sqrt{\frac{11}{3}}=\sqrt{2^2-(\frac{\sqrt{3}}{3})^2}$ לכן העקמומיות היא $\sqrt{\frac{3}{11}}=\frac{1}{r}$.