דף תרגילים 6

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 מיצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה $x(u^1,u^2) = (u^1,u^2,\frac{-au^1-bu^2-d}{c})$ של המישור $.ax+by+cz=d$

פתרון 1

$$x_1 = (1,0,\frac{-a}{c})$$
$$x_2 = (0,1,\frac{-b}{c})$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \langle x_1,x_2\rangle \\ \langle x_1,x_2\rangle & \langle x_2,x_2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\frac{a^2}{c^2} & \frac{ab}{c^2} \\ \frac{ab}{c^2} & 1+\frac{b^2}{c^2} \end{pmatrix}$$

תרגיל 2 מיצאו פרמטריזציה של גליל כמשטח סיבוב סביב ציר z. מיצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 2 יהי $a \in \mathbb{R}$ הרדיוס. פרמטריזציה של העקומה במישור xz

$$r(\phi) = a$$
$$z(\phi) = \phi$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta,\phi) = (a\cos\theta, a\sin\theta, \phi)$$

הוקטורים המשיקים

$$x_\theta = (-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (0,0,1)$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

תרגיל 3 מיצאו פרמטריזציה של חרוט כמשטח סיבוב סביב ציר z. מיצאו את (g_{ij}) עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 3 נקח למשל את הקו הישר $x = z$ במישור xz:

$$\begin{aligned} r(\phi) &= \phi \\ z(\phi) &= \phi \end{aligned}$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = (\phi \cos\theta, \phi \sin\theta, \phi)$$

כלומר

$$\begin{aligned} x_\theta &= (-\phi \sin\theta, \phi \cos\theta, 0) \\ x_\phi &= (\cos\theta, \sin\theta, 1) \end{aligned}$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta \rangle & \langle x_\theta, x_\phi \rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi \rangle & \langle x_\phi, x_\phi \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 4 מיצאו את (g_{ij}) עבור ההליקואיד $x(u^1, u^2) = (u^1 \cos u^2, u^1 \sin u^2, u^2)$.

פתרון 4

$$\begin{aligned} x_1 &= (\cos u^2, \sin u^2, 0) \\ x_2 &= (-u^1 \sin u^2, u^1 \cos u^2, 1) \end{aligned}$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_1, x_2 \rangle \\ \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_2, x_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 + (u^1)^2 \end{pmatrix}$$

תרגיל 5

א. מיצאו את משטח הסיבוב של העקומה $\phi \mapsto (\cosh\phi, 0, \phi) = (r(\phi), 0, z(\phi))$ סביב ציר ה־ z. למשטח המתקבל קוראים קטנואיד. שימו לב:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

וקל לראות כי

$$\cosh'(x) = \sinh(x), \sinh'(x) = \cosh(x).$$

ב. מיצאו את מקדמי המטריקה.

פתרון 5 משטח הסיבוב

$$x(\theta, \phi) = (\cosh\phi\cos\theta, \cosh\phi\sin\theta, \phi)$$

כלומר

$$x_\theta = (-\cosh\phi\sin\theta, \cosh\phi\cos\theta, 0)$$
$$x_\phi = (\sinh\phi\cos\theta, \sinh\phi\sin\theta, 1)$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta\rangle & \langle x_\theta, x_\phi\rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi\rangle & \langle x_\phi, x_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \sinh^2\phi + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & \cosh^2\phi \end{pmatrix} = \cosh^2\phi\delta^i{}_j$$

תרגיל 6

א. מיצאו פרמטריזציה של הספירואיד המתקבל מסיבוב של האליפסה במישור xz

$$2x^2 + 3(z-4)^2 = 5$$

סביב ציר z.

ב. מיצאו את מקדמי המטריקה עבור הפרמטריזציה שמצאתם.

פתרון 6 פרמטריזציה של האליפסה הנתונה במישור xz

$$\phi \mapsto (\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\phi, 0, 4 + \frac{\sqrt{15}}{3}\sin\phi)$$

משטח הסיבוב

$$x(\theta,\phi) = (\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\phi\cos\theta, \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\phi\sin\theta, 4+\frac{\sqrt{15}}{3}\sin\phi)$$

כלומר

$$\begin{aligned} x_\theta &= (-\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\phi\sin\theta, \frac{\sqrt{10}}{2}\cos\phi\cos\theta, 0) \\ x_\phi &= (-\frac{\sqrt{10}}{2}\sin\phi\cos\theta, -\frac{\sqrt{10}}{2}\sin\phi\sin\theta, \frac{\sqrt{15}}{3}\cos\phi) \end{aligned}$$

לכן

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \langle x_\theta, x_\theta\rangle & \langle x_\theta, x_\phi\rangle \\ \langle x_\theta, x_\phi\rangle & \langle x_\phi, x_\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\cos^2\phi & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}\sin^2\phi + \frac{5}{3}\cos^2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2}\cos^2\phi & 0 \\ 0 & \frac{5}{6}(3-\cos^2\phi) \end{pmatrix}$$