

דף תרגילים 8

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1

א. תהי $\alpha(t) = (\pi, 2t)$ עבור $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. מציאו את אורך העקומה α .

ב. תהי

$$x(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

פרמטריזציה של ספירת היחידה. מציאו את אורך העקומה $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 1

א. זהו קו ישר מ- $(\pi, 0)$ ל- (π, π) כלומר אורכו π . לחלופין $\alpha'(t) = (0, 2)$, כלומר $|\alpha'(t)| = 2$,

$$L(\alpha) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \quad \text{כלומר}$$

ב. ראינו כי

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g_{ij})(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \sin^2(2t) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{ij}(\alpha(t)) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\alpha^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\alpha^1}{dt} \frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\alpha^2}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2(2t) \cdot 0^2 + 0 + 1 \cdot 2^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 dt = \pi \end{aligned}$$

תרגיל 2 נתונה עקומה מישורית $\alpha(t) = (t, t)$ עבור $0 \leq t \leq 2\pi$. נתון משטח $x(u^1, u^2)$ בעל מטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2e^{2u^1} & 0 \\ 0 & 2e^{2u^2} \end{pmatrix}$$

חשבו את אורך $\beta = x \circ \alpha$.

פתרון 2

$$(g_{ij})(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 2e^{2t} & 0 \\ 0 & 2e^{2t} \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(t) = (1, 1) = \left(\frac{d\alpha^1}{dt}, \frac{d\alpha^2}{dt} \right)$$

לכן

$$\begin{aligned} L(\beta) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{ij}(\alpha(t)) \frac{d\alpha^i}{dt} \frac{d\alpha^j}{dt}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{g_{11} \left(\frac{d\alpha^1}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{d\alpha^1}{dt} \frac{d\alpha^2}{dt} + g_{22} \left(\frac{d\alpha^2}{dt} \right)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{2t} \cdot 1^2 + 0 + 2e^{2t} \cdot 1^2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4e^{2t}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2e^t dt = 2(e^{\frac{\pi}{2}} - 1) \end{aligned}$$

תרגיל 3 עבור השאלות מדף תרגילים 7 (של שבוע שעבר), זהו את המטריקות השקולות קונפורמית למטריקה שטוחה סטנדרטית, ועבורן חשבו את סמלי גמא ע"י הנוסחאות עבור מטריקה כזו. וודאו כי קיבלתם את אותה תוצאה כמו בחישוב הישיר מדף תרגילים 7.

פתרון 3 מדף תרגילים 7 שאלה 5 היא היחידה הרלוונטית. הגורם הקונפורמי הוא $\lambda = \frac{81}{x^2}$. מתקיים

$$\lambda_1 = -162x^{-3} \quad \lambda_2 = 0$$

לכן

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\lambda_1}{2\lambda} = -x^{-1}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\Gamma_{11}^1 = x^{-1}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\lambda_2}{2\lambda} = 0$$

תרגיל 4

א. מוצאו פרמטריזציה של גליל עם רדיוס a כמשטח סיבוב של עקומה במישור xz .

ב. מוצאו את סמלי גמא.

ג. מוצאו את המשוואות הגיאודזיות.

ד. מוצאו את העקומות הגיאודזיות.

פתרון 4

א. נקח את הקו הישר במישור xz המוגדר ע"י $z(\phi) = \phi$, $r(\phi) = a$, ונקבל את המשטח המבוקש ע"י סיבוב סביב ציר z :

$$x(\theta, \phi) = (a \cos \theta, a \sin \theta, \phi)$$

$$g_{11} = \langle x_\theta, x_\theta \rangle = a^2 \quad \text{ב.}$$

$$g_{12} = \langle x_\theta, x_\phi \rangle = 0$$

$$g_{22} = \langle x_\phi, x_\phi \rangle = 1$$

כל מקדמי המטריקה קבועים כלומר $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = 0$ לכל i, j, k .

לכן $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל i, j, k .

ג. המשוואות הגאודזיות הן

$$k = 1, 2 \quad (\alpha^i)' (\alpha^j)' \Gamma_{ij}^k + (\alpha^k)'' = 0$$

אצלו $\Gamma_{ij}^k = 0$ לכל i, j, k לכן המשוואות הן

$$\begin{cases} (\alpha^1)'' = 0 \\ (\alpha^2)'' = 0 \end{cases}$$

ד. ע"י אינטגרציה נקבל

$$\begin{cases} \alpha^1 = C_1 + C_2 s \\ \alpha^2 = C_3 + C_4 s \end{cases}$$

כלומר

$$\alpha(s) = (\alpha^1(s), \alpha^2(s)) = (C_1 + C_2 s, C_3 + C_4 s)$$

תרגיל 5 עבור הספירה $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ מציאו פרמטריזציה כמשטח סיבוב של עקומה במישור xz , ומציאו את המשוואות הגיאודזיות.

פתרון 5 כפי שכבר ראינו

$$x(\theta, \phi) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

זה משטח סיבוב עם $r^2(\phi) = a^2 \sin^2 \phi$ ו- $\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 = a^2$ כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 \sin^2 \phi & \\ & a^2 \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} a^{-2} \sin^{-2} \phi & \\ & a^{-2} \end{pmatrix}$$

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} a^2 \sin 2\phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק $g_{11;2}$ שונה מ-0.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - g_{11;2} + g_{12;1})g^{22} = \frac{1}{2}(-a^2 \sin 2\phi) a^{-2} = -\sin \phi \cos \phi \\ \Gamma_{12}^1 &= \frac{1}{2}(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{1}{2}(a^2 \sin 2\phi) a^{-2} \sin^{-2} \phi = \cot \phi \\ \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0 \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0 \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0 \end{aligned}$$

המשוואות הגאודזיות הן

$$\begin{cases} \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^1 + \alpha^{1''} = 0 \\ \alpha^{i'} \alpha^{j'} \Gamma_{ij}^2 + \alpha^{2''} = 0 \end{cases}$$

אצלו

$$\Gamma_{11}^2 = -\sin \phi \cos \phi \quad \Gamma_{12}^1 = \cot \phi$$

לכן במשוואה הראשונה רק $\Gamma_{12}^1 \neq 0$ כלומר היא

$$2\alpha^{1'} \alpha^{2'} \cot \phi + \alpha^{1''} = 0$$

כלומר

$$2 \cot(\phi) \theta' \phi' + \theta'' = 0$$

במשוואה השנייה רק $\Gamma_{11}^2 \neq 0$ כלומר היא

$$\left(\alpha^{1'}\right)^2 (-\sin \phi \cos \phi) + \alpha^{2''} = 0$$

כלומר

$$-\sin \phi \cos \phi (\theta')^2 + \phi'' = 0$$

סה"כ

$$\begin{cases} 2 \cot(\phi) \theta' \phi' + \theta'' = 0 \\ -\sin \phi \cos \phi (\theta')^2 + \phi'' = 0 \end{cases}$$