דף תרגילים 11

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 נתון המשטח הבא (משטח $Enneper$):

$$x(u,v) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uv^2, -v + \frac{1}{3}v^3 - vu^2, u^2 - v^2\right)$$

הראו כי הוא משטח מינימלי.

פתרון 1

$$x_1 = \left(1 - u^2 + v^2, -2uv, 2u\right)$$
$$x_2 = \left(2uv, -1 + v^2 - u^2, -2v\right)$$

כלומר

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2 & 0 \\ 0 & (-1+v^2-u^2)^2 + 4u^2v^2 + 4v^2 \end{pmatrix} = \lambda(u,v)(\delta_{ij})$$

באשר

$$\lambda(u,v) = (1-u^2+v^2)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2,$$

כלומר הקואורדינטות איזותרמיות. לכן יש להראות כי $x_{11} + x_{22} = 0$.

$$\begin{cases} x_{11} = (-2u, -2v, 2) \\ x_{22} = (2u, 2v, -2) \end{cases}$$

מש"ל.

תרגיל 2 הוכיחו כי אם משטח הוא משטח מינימלי, אז עקמומיות גאוס היא אי־חיובית בכל נקודה.

פתרון 2 אם משטח הוא מינימלי אז $H = 0$ בכל נקודה כלומר $k_1 = -k_2$ בכל נקודה. לכן עקמומיות גאוס היא $K = k_1 k_2 = -(k_1)^2 \leq 0$.

תרגיל 3 הראו כי משטח $Scherk$ הנתון ע"י

$$x(x,y) = \left(x, y, \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)\right)$$

הוא משטח מינימלי.

פתרון 3 תרגיל זה הופיע כמשפט 10.2.5 בהרצאה.

תרגיל 4 נתון משטח בעל מטריקה

$$(g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

הראו כי יש לו עקמומיות גאוס קבועה $K \equiv -1$.

פתרון 4 גורם קונפורמי $\lambda(x,y) = y^{-2}$ נגזרותיו $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2y^{-3}$. לכן

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{-\lambda_1}{2\lambda} = 0 \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-2y^{-3}}{2y^{-2}} = \frac{-1}{y} \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{-\lambda_2}{2\lambda} = \frac{1}{y} \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{\lambda_2}{2\lambda} = \frac{-1}{y} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{\lambda_1}{2\lambda} = 0
\end{aligned}$$

כעת,

$$\begin{aligned}
K &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right) \\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right) \\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) \\
&= y^2\left(\frac{-1}{y^2} - 0 + 0 - \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y}\right)\left(\frac{-1}{y}\right) - 0\right) \\
&= -1
\end{aligned}$$