דף תרגילים 9

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

תרגיל 1 להזכירכם הנגזרת הכיוונית של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ בנקודה $p\in\mathbb{R}^n$ בכיוון וקטור $v\in\mathbb{R}^n$ היא $\nabla_v f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f\circ\alpha(t)$ כאשר $\alpha(t)$ עקומה המקיימת $\alpha(0)=p,\ \alpha'(0)=v$. הראו כי אם α מתארת קו ישר בכיוון וקטור v עם $\alpha(0)=p$ אז מתקבלת ההגדרה של נגזרת כיוונית מאינפי' 3: $\lim_{h\to 0}\frac{f(p+hv)-f(p)}{h}$.

פתרון 1 נגדיר $\alpha(t)=p+tv$. אז אכן $\alpha(0)=p,\ \alpha'(0)=v$ ומתקיים:

$$\nabla_v f=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(p+tv)=\lim_{h\to 0}\frac{f(p+hv)-f(p)}{h}$$

תרגיל 2

א. הראו כי הנורמל למשטח $ax+by+cz+d=0$ ($a^2+b^2+c^2>0$) הוא

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

ב. הסיקו כי העתקת ווינגרטן של המישור $ax+by+cz+d=0$ היא העתקת האפס.

פתרון 2

א. הפרמטריזציה היא

$$x(u^1,u^2)=\left(u^1,u^2,\frac{-d-au^1-bu^2}{c}\right)$$

נחשב את הנורמל

$$x_1=\left(1,0,\frac{-a}{c}\right),\qquad x_2=\left(0,1,\frac{-b}{c}\right)$$

לכן

$$x_1 \times x_2 = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & \frac{-a}{c} \\ 0 & 1 & \frac{-b}{c} \end{pmatrix} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

כלומר אכן

$$n(u^1, u^2) = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

ב. $n(u^1, u^2)$ קבוע, לכן $\frac{\partial n}{\partial u^i} = 0$ עבור $1 \leq i \leq 2$. כלומר $W_p(x_1) = W_p(x_2) = 0$ כלומר $W_p(v) \equiv 0$.

תרגיל 3 נתון המשטח המוגדר ע"י המשוואה

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 4\right\}$$

חשבו את העתקת וינגרטן של M.

פתרון 3 זהו גליל, לכן אותו הפתרון כפי שכבר ראינו בכיתה.

תרגיל 4 נתונה הפונקציה $f(x,y) = 6x^2 + 8xy + 2y^2$.

א. חשבו את העתקת וינגרטן של הגרף של הפונקציה f בנקודה $p = (0,0,0)$.

ב. כיצד נראה המשטח בנקודה $p = (0,0,0)$?

פתרון 4

א.

$$H_f = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

כלומר בהינתן $v = v^i x_i \in T_pM$,

$$H_f v = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12v^1 + 8v^2 \\ 8v^1 + 4v^2 \end{pmatrix}$$

כלומר בגלל ש־ p נקודה קריטית של $f(x,y)$ מתקיים

$$W_p(v^i x_i) = (12v^1 + 8v^2)x_1 + (8v^1 + 4v^2)x_2$$

ב. למשטח יש נקודת אוכף ב־ p כי $det(H_f) < 0$.

תרגיל 5 נתון המשטח $M \subseteq \mathbb{R}^3$ עם פרמטריזציה $x : U \to \mathbb{R}^3$ כאשר $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \mid \ y > 0\}$, עם המטריקה $(g_{ij}) = \frac{1}{y^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. חשבו את האורך (במידה וקיים) של העקומות $\beta_i = x \circ \alpha_i$ במקרים הבאים:

א. $\alpha_1(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$.

ב. $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t)$ כאשר $t \in [0, \pi]$.

ג. $\alpha_3(t) = (1, t)$ כאשר $t \in (0,1)$.

שימו לב כי יתכן ותקבלו אורך אינסופי עבור חלק מהעקומות.

ד. חשבו את השטח של פרמטריזציה x בתחום D, כאשר

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \quad x^2 + y^2 > 1, \quad y > 0\right\}$$

פתרון 5

א. מתקיים $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t)$ כלומר

$$\begin{aligned} L(x \circ \alpha) &= \int \sqrt{\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt} g_{ij}(\alpha(t))} dt \\ &= \int \sqrt{(-\sin t)^2 \frac{1}{\sin^2 t} + (\cos t)^2 \frac{1}{\sin^2 t}} dt = \int \frac{1}{\sin t} dt \end{aligned}$$

כדי לחשב את $\int \frac{1}{\sin t} dt$ ניתן למשל להשתמש בהצבה האוניברסלית $t = \tan \frac{x}{2}$ שפותרת כל אינטגרל מהצורה $\int R(\sin x, \cos x) dt$ כאשר R פונקציה רציונלית. הנוסחאות הן:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad dx = \frac{2}{1+t^2}$$

אצלנו

$$\int \sin^{-1} t dt = \int \frac{1+w^2}{2w} \frac{2}{1+w^2} dw = \int w^{-1} dw = \log(w) + C = \log \tan \frac{t}{2} + C$$

כלומר

$$L(\beta) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \sin^{-1} t dt = \log \tan \frac{\pi}{3} - \log \tan \frac{\pi}{6} = \log 3$$

ב. אותו הפתרון רק עם גבולות אינטגרציה שונים:

$$L(\beta)=\int_0^{\pi}\sin^{-1}t dt=\log\tan\frac{\pi}{2}^{-}-\log\tan 0^{+}=\infty-(-\infty)=\infty$$

ג. מתקיים $\alpha'(t)=(0,1)$ כלומר

$$\begin{aligned}L(x\circ\alpha)&=\int\limits_0^1\sqrt{\frac{d\alpha^i}{dt}\frac{d\alpha^j}{dt}g_{ij}(\alpha(t))}dt\\&=\int\limits_0^1\sqrt{1^2\frac{1}{t^2}}dt=\int\limits_0^1 t^{-1}dt\\&=\log(1)-\log(0^{+})=0-(-\infty)=\infty\end{aligned}$$

ד.

$$dA=\sqrt{det(g_{ij})}du^1du^2=y^{-2}dxdy$$

לכן

$$\begin{aligned}area(x\circ D)&=\iint\limits_D dA=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}y^{-2}dy\right)dx\\&=\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin(\frac{1}{2})-\arcsin(-\frac{1}{2})\\&=\frac{\pi}{6}-\frac{-\pi}{6}=\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

תרגיל 6 נתבונן במשטח $M\subseteq\mathbb{R}^3$ המוגדר ע"י

$$M=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;\mid\; 4x^2+4y^2+4z^2=1\right\}$$

א. מיצאו פרמטריזציה של עקומה $\alpha(s)$ במהירות יחידה במישור xz כך ש־ M משטח סיבוב (סביב ציר z) של α.

ב. מיצאו את הפרמטריזציה $x(\theta,\phi)$. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הפרמטריזציה שמצאתם.

ג. חשבו את השטח הכולל של המשטח M:

$$area(M) = \int_M dA$$

פתרון 6

א. M ספירה עם רדיוס $\frac{1}{2}$ סביב הראשית. לכן העקומה היא חצי עיגול מרדיוס $\frac{1}{2}$ סביב הראשית: $t \mapsto \left(\frac{1}{2}\sin t, \frac{1}{2}\cos t\right)$ באשר $t \in [0,\pi]$. מתקיים $|\alpha'(t)| = \frac{1}{2}$ כלומר $s(t) = \frac{1}{2}t$ כלומר $t(s) = 2s$ כלומר פרמטריזצית אורך קשת היא

$$\alpha(s) = \left(\frac{1}{2}\sin 2s, \frac{1}{2}\cos 2s\right) = (r(s), z(s))$$

באשר $s \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

ב. פרמטריזציה

$$x(\theta,\phi) = \left(\frac{1}{2}\sin 2\phi\cos\theta, \frac{1}{2}\sin 2\phi\sin\theta, \frac{1}{2}\cos 2\phi\right)$$

אז לפי הנוסחה של (g_{ij}) עבור משטח סיבוב:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. כפי שראינו שטח מעטפת של ספירה עם רדיוס R הוא

$$4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

תרגיל 7 נתבונן במשטח M שהוא ספירה ב־ $\mathbb{R}^3$ בעלת רדיוס 5 שמרכזה בראשית הצירים. יהי $-5 < a < 5$. נסמן γ_a עקומת החיתוך של M ושל המישור $\{z = a\}$.

א. מיצאו פרמטריזצית מהירות יחידה של γ_a.

ב. עבור איזה ערך של a העקומה γ_a היא עקומה גאודזית של M?

ג. נסתכל על העקומה γ_3. מיצאו ספירה $S \subseteq \mathbb{R}^3$ כך ש־ γ_3 עקומה גאודזית על S.

פתרון 7

א. חיתוך $x^2+y^2+z^2=25$ עם $z=a$ הוא אוסף הנקודות (x,y,a) המקיימות $x^2+y^2=25-a^2$. נסמן $r=\sqrt{25-a^2}$ אז פרמטריזציה היא $\alpha(t)=(r\cos t, r\sin t)$.

נמצא פרמטריזצית אורך קשת. $|\alpha'(t)|=r$ כלומר $s(t)=rt$ כלומר $t(s)=\frac{s}{r}$ כלומר

$$\beta(s)=\alpha(t(s))=\alpha(\frac{s}{r})=\left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

ב. העקומה γ_a היא חיתוך של מישור אופקי עם הספירה, כלומר היא קו רוחב. מצד שני, הגאודזים של הספירה הם המעגלים הראשיים. המעגל הראשי היחיד שהוא גם קו רוחב הוא קו המשווה, כלומר חיתוך הספירה עם $\{z=0\}$. לכן γ_a היא עקומה גיאודזית רק עבור $a=0$.

ג. כאמור חיתוך $x^2+y^2+z^2=25$ עם $z=3$ הוא אוסף הנקודות במישור $z=3$ המקיימות $x^2+y^2=25-9=16$, כלומר זהו מעגל ברדיוס 4 שמרכזו $(0,0,3)$. גאודזים על ספירות הם מעגלים גדולים כלומר בעלי אותו רדיוס ומרכז כמו הספירה. לכן רדיוס הספירה הוא 4 ומרכזה $(0,0,3)$ כלומר היא אוסף הנקודות המקיימות $x^2+y^2+(z-3)^2=16$.