

## דף תרגילים 12

201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

**תרגיל 1** נסתכל על משטח בקואורדינטות  $(x, y)$  בעל המטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

עבור  $y > 0$ .

חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח.

**פתרון 1** נשתמש באופרטור לפלס-בלטרמי. הגורם הקונפורמי הוא

$$\lambda(x, y) = f^2(x, y) = \frac{1}{y} > 0$$

כלומר

$$f(x, y) = y^{-\frac{1}{2}}$$

–

$$\begin{aligned} K &= -\Delta_{LB}(\ln(f)) \\ &= -\Delta_{LB}\left(\ln\left(y^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot y \cdot \Delta_0(\ln y) \\ &= \frac{y}{2}(\ln y)'' \\ &= \frac{y}{2}\left(\frac{-1}{y^2}\right) \\ &= \frac{-1}{2y} \end{aligned}$$

**תרגיל 2** נסתכל על משטח בקואורדינטות  $(x, y)$  בעל המטריקה

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

עבור  $y > 0$ . חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה של המשטח.

**פתרון 2**

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

רק  $g_{22;2} = 1$  שונה מ-0.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;1} - g_{11;2} + g_{12;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = \frac{1}{2y}$$

לפי *Theorema Egregium*, עקמומיות גאוס היא

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1}^j \Gamma_{2]j}^2 \right) \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1}^1 \Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{1[1}^2 \Gamma_{2]2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left( \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

### תרגיל 3

נתונה ספירת היחידה  $S^2$ . מיצאו פרמטריזציה כמשטח סיבוב וחשבו עקמומיות גאוס  $K(\theta, \phi)$  בשתי דרכים:

א. כדטרמיננטה של העתקת ווינגרטון.

ב. באמצעות הנוסחה

$$K = \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^j \Gamma_{2]j}^2 \right)$$

### פתרון 3

א. פרמטריזציה

$$x(\theta, \phi) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

כזכור הנורמל של ספירה הממוקמת בראשית הצירים מקביל לרדיוס וקטור. אצלנו הספירה היא ספירת יחידה כלומר

$$n(\theta, \phi) = x(\theta, \phi)$$

בפרט

$$\begin{cases} n_1 = x_1 = 1x_1 + 0x_2 \\ n_2 = x_2 = 0x_1 + 1x_2 \end{cases}$$

כלומר

$$L_j^i = \delta_j^i$$

ובפרט

$$K = 1$$

ב.

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^2 \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} \sin^{-2} \phi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

וכן

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix} 2 \sin \phi \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

רק  $g_{11;2} = 2 \sin \phi \cos \phi$  שונה מ-0.

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;1} - \overbrace{g_{11;2}}^{2 \sin \phi \cos \phi} + g_{12;1})g^{22} = -\sin \phi \cos \phi$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2}(\overbrace{g_{11;2}}^{2 \sin \phi \cos \phi} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{\cos \phi}{\sin \phi}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = 0$$

לפי *Theorema Egregium*, עקמומיות גאוס היא

$$\begin{aligned} K &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^j \Gamma_{2]j}^2 \right) \\ &= \frac{2}{g_{11}} \left( \Gamma_{1[1,2]}^2 + \Gamma_{1[1]}^1 \Gamma_{2]1}^2 + \Gamma_{1[1]}^2 \Gamma_{2]2}^2 \right) \\ &= \frac{1}{g_{11}} \left( \Gamma_{11,2}^2 - \Gamma_{12,1}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^2 \right) \\ &= \sin^{-2} \phi \left( -\cos(2\phi) - 0 + 0 - \frac{\cos \phi}{\sin \phi} (-\sin \phi \cos \phi) + 0 - 0 \right) \\ &= \sin^{-2} \phi (-\cos^2 \phi + \sin^2 \phi + \cos^2 \phi) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**תרגיל 4** נתונה העקומה  $\alpha(t) = (\cot(t), \frac{1}{2} \sin(2t))$  עבור  $0 < t < \pi$ .

א. סרטטו סקיצה של העקומה.

ב. מציאו עקמומיות  $k_\alpha(t)$  (אין צורך לפשט).

ג. הראו כי העקומה היא הגרף של הפונקציה  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ .

ד. באמצעות אופרטור בייטמן, מציאו עקמומיות  $k_\alpha(x, y)$  (אין צורך לפשט).

**פתרון 4**

א.

ג.

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= (\cot(t), \frac{1}{2} \sin(2t)) \\ \alpha'(t) &= (\frac{-1}{\sin^2(t)}, \cos(2t)) \\ \alpha''(t) &= (\frac{2 \cos t}{\sin^3 t}, -2 \sin(2t))\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}k_\alpha(t) &= \frac{|\det[\alpha' \ \alpha'']|}{|\alpha'|^3} \\ &= \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sin^2(t)} \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right|^3} \left| \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sin^2(t)} & \frac{2 \cos t}{\sin^3 t} \\ \cos(2t) & -2 \sin(2t) \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{\left( \frac{1}{\sin^4 t} + \cos^2(2t) \right)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{2 \sin(2t)}{\sin^2 t} - \frac{2 \cos t \cos(2t)}{\sin^3 t} \right)\end{aligned}$$

ג. כאשר  $0 < t < \pi$  אז  $\cot(t)$  רץ מ- $-\infty$  ל- $\infty$ . כמו כן

$$f(x) = f(\cot t) = \frac{\cot t}{\cot^2 t + 1} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + 1} = \frac{\frac{\cos t}{\sin t}}{\frac{1}{\sin^2 t}} = \sin t \cos t = \frac{1}{2} \sin(2t) = y$$

ד. כזכור עבור עקומה מישורית הנתונה המשוואה  $F(x, y) = 0$  העקמוניות היא

$$\frac{|D_B(F)|}{|\nabla F|^3}$$

באשר

$$.D_B(F) = F_{xx}F_yF_y - 2F_{xy}F_yF_x + F_{yy}F_xF_x$$

כאן

$$F(x, y) = y - \frac{x}{x^2 + 1} = 0$$

יהיה יותר קל לכתוב  $x^2 + 1$  ולעבוד עם

$$F(x, y) = x^2y + y - x = 0$$

$$\begin{cases} F_x = 2xy - 1 \\ F_y = x^2 + 1 \\ F_{xx} = 2y \\ F_{xy} = 2x \\ F_{yy} = 0 \end{cases}$$

כלומר

$$k_\alpha(x, y) = \frac{|2y(x^2 + 1)^2 - 2(2x)(x^2 + 1)(2xy - 1)|}{((2xy - 1)^2 + (x^2 + 1)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

**תרגיל 5** בתרגול ראינו את העקומה

$$\alpha(t) = \left( \sin(t), \frac{1}{2} \sin(2t) \right), \quad t \in [0, 2\pi]$$

ע"ס סקיצה שלה הסקנו כי עקמומיות מסומנת כוללת היא 0. הראו זאת ישירות כלומר:

א. מציאו את העקמומיות המסומנת בכל נקודה.

ב. חשבו את העקמומיות המסומנת הכוללת.

רמז: היעזרו בסימטריה של הפונקציות הטריגונומטריות סביב  $x = \pi$  כלומר בנוסחאות

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\pi - \theta), \quad \cos(\pi + \theta) = \cos(\pi - \theta)$$

**פתרון 5**

א.

$$\alpha(t) = \left( \sin(t), \frac{1}{2} \sin(2t) \right)$$

$$\alpha'(t) = (\cos(t), \cos(2t))$$

$$\alpha''(t) = (-\sin(t), -2\sin(2t))$$

כלומר

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\alpha(t) &= \frac{\det[\dot{\alpha} \quad \ddot{\alpha}]}{|\dot{\alpha}|^3} = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \right|^3} \begin{vmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \cos(2t) & -2\sin(2t) \end{vmatrix} \\ &= \frac{-2\cos(t)\sin(2t) - \sin(t)\cos(2t)}{(\cos^2(t) + \cos^2(2t))^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

ג. כדי לחשב את

$$\int_0^{2\pi} \frac{-2 \cos(t) \sin(2t) - \sin(t) \cos(2t)}{(\cos^2(t) + \cos^2(2t))^{\frac{3}{2}}} dt$$

נשתמש בהצבה  $t = \pi + x$  ונקבל

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{-2 \cos(\pi + x) \sin(2(\pi + x)) - \sin(\pi + x) \cos(2(\pi + x))}{(\cos^2(\pi + x) + \cos^2(2(\pi + x)))^{\frac{3}{2}}} dx$$

כעת, לפי זוגיות  $\cos(x)$ , אי-זוגיות  $\sin(x)$  ו-

$$\sin(\pi + x) = -\sin(\pi - x), \quad \cos(\pi + x) = \cos(\pi - x)$$

מקבלים שהאינטגרנד הוא אי-זוגי, כלומר האינטגרל הוא 0.