# דף תרגילים 13

## 201 – 88 תשע"ח סמסטר ב'

**תרגיל 1** נסתכל על משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\cosh\phi, 0, \phi)$ עבור $\phi \in \mathbb{R}$.

א. חשבו את עקמומיות גאוס בכל נקודה (כדאי להעזר באופרטור לפלס בלטרמי).

ב. חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של המשטח.

**פתרון 1**

א. עבור משטח סיבוב

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh^2\phi & 0 \\ 0 & 1+\sinh^2\phi \end{pmatrix} = \cosh^2\phi\delta_{ij}$$

נשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי. הגורם הקונפורמי הוא

$$\lambda(\theta,\phi) = f^2(\theta,\phi) = \cosh^2\phi$$

כלומר

$$f(\theta,\phi) = \cosh\phi$$

ו־

$$\begin{aligned} K &= -\Delta_{LB}\left(\ln(f)\right) \\ &= -\Delta_{LB}\left(\ln(\cosh\phi)\right) \\ &= -\left(\cosh^{-2}\phi\right)\Delta_0(\ln(\cosh\phi)) \\ &= -\cosh^{-2}\phi\,(\ln(\cosh\phi))'' \\ &= -\cosh^{-2}\phi\,(\tanh\phi)' \\ &= -\cosh^{-2}\phi\left(1-\tanh^2\phi\right) \\ &= \frac{\tanh^2\phi - 1}{\cosh^2\phi} \\ &= \frac{-1}{\cosh^4\phi} \end{aligned}$$

ב. נחשב את אלמנט השטח.

$$dA_M = \sqrt{|g_{ij}|} = \cosh^2\phi$$

לכן עקמומיות גאוס כוללת

$$\begin{aligned}\int_M K_p \,\mathrm{d}A_M &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\cosh^4\phi}\cosh^2\phi \,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{\cosh^2\phi}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\ &= -2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\cosh^2\phi}\,\mathrm{d}\phi \\ &= -2\pi\left(\tanh\phi|_{-\infty}^{\infty}\right) \\ &= -2\pi(1-(-1)) \\ &= -4\pi\end{aligned}$$

כי

$$\lim_{x\to\infty}\tanh(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = 1$$

ובאותו אופן

$$\lim_{x\to-\infty}\tanh(x) = -1$$

**תרגיל 2** חשבו את עקמומיות גאוס הכוללת של משטח הסיבוב של העקומה $\alpha(\phi) = (\phi, 0, \phi^2)$ עבור $\phi \in [0,\infty]$.

**פתרון 2** עבור משטח סיבוב

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} r^2(\phi) & 0 \\ 0 & \left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\phi}\right)^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\phi^2 & 0 \\ 0 & 1+4\phi^2\end{pmatrix}$$

כלומר

$$(g_{ij;1}) = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (g_{ij;2}) = \begin{pmatrix}2\phi & 0 \\ 0 & 8\phi\end{pmatrix}$$

ז"א

$$g_{11;2} = 2\phi, \qquad g_{22;2} = 8\phi$$

והשאר 0.

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{11} &= \frac{1}{2}(g_{11;1} - g_{11;1} + g_{11;1})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{11} &= \frac{1}{2}(g_{12;1} - g_{11;2} + g_{12;1})g^{22} = \frac{-\phi}{1+4\phi^2} \\
\Gamma^1_{12} &= \frac{1}{2}(g_{11;2} - g_{12;1} + g_{21;1})g^{11} = \frac{1}{\phi} \\
\Gamma^2_{12} &= \frac{1}{2}(g_{12;2} - g_{12;2} + g_{22;1})g^{22} = 0 \\
\Gamma^1_{22} &= \frac{1}{2}(g_{21;2} - g_{22;1} + g_{21;2})g^{11} = 0 \\
\Gamma^2_{22} &= \frac{1}{2}(g_{22;2} - g_{22;2} + g_{22;2})g^{22} = \frac{4\phi}{1+4\phi^2}
\end{aligned}
$$

לפי *Theorema Egregium*, עקמומיות גאוס היא

$$
\begin{aligned}
K(\theta,\phi) &= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right) \\
&= \frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{1[1,2]} + \Gamma^1_{1[1}\Gamma^2_{2]1} + \Gamma^2_{1[1}\Gamma^2_{2]2}\right) \\
&= \frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right) \\
&= \frac{1}{\phi^2}\left(\frac{4\phi^2-1}{(1+4\phi^2)^2} - 0 + 0 + \frac{1}{1+4\phi^2} - \frac{4\phi^2}{(1+4\phi^2)^2} - 0\right) \\
&= \frac{4}{(1+4\phi^2)^2}
\end{aligned}
$$

כעת לחישוב עקמומיות גאוס כוללת נמצא את אלמנט השטח

$$
dA_M = \sqrt{|g_{ij}|} = \phi(1+4\phi^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi
$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\int_M K_p \,\mathrm{d}A_M &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \frac{4}{(1+4\phi^2)^2}\phi(1+4\phi^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^{\infty} \frac{4\phi}{(1+4\phi^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}\phi \\
&= \begin{Bmatrix} t = 1+4\phi^2 \\ \mathrm{d}t = 8\phi\,\mathrm{d}\phi \end{Bmatrix} \\
&= \pi\int_1^{\infty} t^{\frac{-3}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= -2\pi\; t^{\frac{-1}{2}}\Big|_1^{\infty} \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

**תרגיל 3** יהי $\rho > 0$ ותהי

$$.f(x,y) = \frac{1}{1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)}$$

חשבו את עקמומיות גאוס של המטריקה $.g_{ij}(x,y) = f^2(x,y)\delta_{ij}$

**פתרון 3** נשתמש באופרטור לפלס־בלטרמי.

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{1}{1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)} \\
\lambda(x,y) &= \frac{1}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2}
\end{aligned}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
K &= -\Delta_{LB}\left(\ln\left(f\right)\right)\\
&= \Delta_{LB}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2\Delta_0\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\ln\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{1}{2}\rho x}{1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\frac{1}{2}\rho y}{1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)}\right)\right)\\
&= \left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2\left(\frac{-\frac{\rho}{2}\left(-1+\frac{\rho}{4}(x^2-y^2)\right)}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2}+\frac{-\frac{\rho}{2}\left(-1+\frac{\rho}{4}(y^2-x^2)\right)}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2}\right)\\
&= \left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2\cdot\frac{\rho}{\left(1+\frac{\rho}{4}(x^2+y^2)\right)^2}\\
&= \rho
\end{aligned}
$$

**תרגיל 4** יהי $M\subset\mathbb{R}^3$ משטח מוגדר ע"י גרף של $z=f(x,y)$ כאשר $f(x,y)=3x^2+8xy-3y^2$. יהי $(e_1,e_2,e_3)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.

א. מיצאו מטריצת הסיאן $H_f$ של $f$ בראשית הצירים.

ב. יהיו $\lambda_i$ (כאשר $i=1,2$) ערכים עצמיים של $H_f$. יהי $v_i$ וקטור עצמי במישור $(x,y)$ השייך לערך עצמי $\lambda_i$. נגדיר מישור $E_i\subset\mathbb{R}^3$ ($i=1,2$) הנפרש ע"י $e_3$ ו־ $v_i$. נגדיר עקומה $\gamma_i\subset\mathbb{R}^3$ ע"י $\gamma_i=M\cap E_i$.

מיצאו את העקמומיות המסומנת של כל אחת מהעקומות $\gamma_i$ בראשית הצירים.

ג. חשבו את העתקת ווינגרטן של $M$ בראשית הצירים ואת עקמומיות גאוס של $M$ בראשית הצירים.

ד. חשבו את העקמומיות הממוצעת של $M$ בראשית הצירים.

**פתרון 4**

א.

$$H_f=\begin{pmatrix}6&8\\8&-6\end{pmatrix}$$

ב. נשים לב שראשית הצירים נקודה קריטית כי $f_x = f_y = 0$ שם, לכן המישור $T_pM$ מקביל למישור $xy$ ו־ $H_f = \left(L^i{}_j\right)$ בנקודה זו.

העקמומיות המסומנות $\tilde{k}_{\beta_i}$ הן לכן $\tilde{k}_{\beta_i} = k_i = \lambda_i$.

נמצא את הערכים העצמיים: הפולינום האופייני הוא $(6-x)(-6-x) - 64 = 0$ כלומר הערכים העצמיים הם $\lambda_{1,2} = \pm 10$ ואלה הם העקמומיות המסומנות של $\beta_{1,2}$.

ג.

$$K = \tilde{k}_{\beta_1}\tilde{k}_{\beta_2} = \lambda_1\lambda_2 = -100$$

ד. עקמומיות ממוצעת $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = 0$.

**תרגיל 5** יהי $C > 0$ ותהי $f(x,y)$ פונקציה המקיימת

$$.f(x,y) \geq C(x^2+y^2), \qquad f(0,0) = 0$$

א. למצוא חסם תחתון לכל ערך עצמי של ההסיאן של $f$ בראשית הצירים.

ב. למצוא חסם תחתון לעקמומיות גאוס של הגרף של $f$ בראשית הצירים.

**פתרון 5**

א. נסתכל על גרף הפונקציה

$$g(x,y) = C(x^2+y^2)$$

ראשית הצירים נקודה קריטית לכן

$$(L^i{}_j) = H_g = \begin{pmatrix} 2C & 0 \\ 0 & 2C \end{pmatrix}$$

כלומר

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2C$$

כלומר

$$\widetilde{k_{\beta_1}} = \widetilde{k_{\beta_2}} = 2C$$

באשר העקומות $\beta_i$ מוגדרות ע"י $\beta_i = M_g \cap E_i$ באשר $M_g$ הגרף של $g$, ו־ $E_i$ המישורים $E_i = Span(v_i, n)$ באשר $v_i$ הו"ע של העתקת ווינגרטן.

נסמן $\beta_v = M_g \cap E_v$ באשר $E_v = Sp(v,n)$, אז לכל $v \in T_pM$

$$\widetilde{k_{\beta_v}} = 2C.$$

כעת נחזור להסתכל על $f(x,y)$. בראשית הצירים הגרפים של $f$ ו־ $g$ נחתכים ו־ $f > g$.
בפרט אם נסמן $\gamma_i = M_f \cap F_i$ באשר $F_i = Sp(w_i, n)$ באשר $w_i$ ו"ע של העתקת ווינגרטן של $M_f$ בראשית אז

$$\widetilde{k_{\gamma_i}} > \widetilde{k_{\beta_{v_i}}} = 2C, \quad i = 1,2$$

כלומר הערכים העצמיים של ההסיאן הם לפחות $2C$.

ב. עקמומיות גאוס לפחות $2C \cdot 2C = 4C^2$.

**תרגיל 6**

א. תהי $C \subset \mathbb{R}^2$ עקומת ז'ורדן רגולרית. להראות שבנקודה של $C$ הקרובה ביותר לראשית הצירים הרדיוס־וקטור הוא מאונך לוקטור המשיק.

ב. יהי $M$ משטח סגור ב־ $\mathbb{R}^3$. נניח שנקודה $P$ על $M$ הרחוקה ביותר מראשית הצירים. מיצאו סימן של עקמומיות גאוס של $M$ בנקודה $P$.

**פתרון 6**

א. בנקודה הקרובה לראשית $|\alpha(t)|$ מינימלי כלומר $|\alpha(t)|^2 = \langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle$ מינימלי. כלומר

$$\langle \alpha(t), \alpha(t) \rangle' = 0$$

ולפי כלל לייבניץ

$$2\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

כלומר

$$\langle \alpha'(t), \alpha(t) \rangle = 0$$

כדרוש.

ב. $|x(u^1,u^2)|$ מינימלי אמ"מ $|x(u^1,u^2)|^2$ מינימלי, וזה קורה אמ"מ $\langle x, x \rangle' = 0$ כלומר לפי לייבניץ $\langle x, x_i \rangle = 0$ לכל $i = 1,2$ כלומר $x(u^1,u^2)$ מאונך ל־ $T_pM$ כלומר

$$n(u^1,u^2) = \alpha x(u^1,u^2)$$

עבור $\mathbb{R} \ni \alpha \neq 0$. לכן שם

$$L_{ij} = -\langle x_i, n_j \rangle = -\langle x_i, (\alpha x)_j \rangle = -\alpha g_{ij}$$

לכן

$$L^i{}_j = -g^{ik} L_{kj} = \alpha g^{ik} g_{kj} = \alpha \delta^i{}_j$$

בפרט

$$K = \alpha^2 > 0$$