תרגיל 3

88201 גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית

תאריך הגשה: 14.06.2026

תרגיל 1. *יהי $c>0$, ונתבונן בחרוט ללא הקודקוד,נתון על ידי הפרמטריזציה*

$$X(\theta,\phi)=(\phi\cos\theta,\phi\sin\theta,c\phi),\qquad \theta>0,\quad \phi\in\mathbb{R}.$$

תהי $\alpha(t)=(t,t)$, עבור $t\in[1,2]$, ותהי העקומה על החרוט

$$\beta(t)=X(\alpha(t))=X(t,t).$$

1. *הוכיחו כי X היא פרמטריזציה רגולרית של משטח, וחשבו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה.*
2. *חשבו את אורך העקומה β בעזרת התבנית היסודית הראשונה.*
3. *חשבו את $\beta'(t)$ ישירות בתור עקומה ב-$\mathbb{R}^3$, והראו שמתקבל אותו אורך.*

תרגיל 2 (פרמטריזציית אורך קשת)**.** *יהי $a>0$, ותהי*

$$\alpha(t)=\left(t,a\cosh\frac{t}{a}\right),\qquad t\in[0,T].$$

1. *הוכיחו שהעקומה רגולרית, וחשבו את מהירותה $|\alpha'(t)|$.*
2. *חשבו את פונקציית אורך הקשת*

$$s(t)=\int_0^t|\alpha'(\tau)|\,d\tau,$$

מצאו את הפונקציה ההפוכה $t=t(s)$, וכתבו את הפרמטריזציה הטבעית של העקומה.

3. *הוכיחו שהפרמטריזציה שמצאתם היא במהירות יחידה, וחשבו את העקמומיות כפונקציה של s.*

תרגיל 3 (עקמומיות של עקומה בצורה סתומה)**.** *תהי*

$$F(x,y)=xy-1,$$

ותהי העקומה

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:F(x,y)=0\}.$$

נשתמש בנוסחת Bateman--Reiss:

$$k=\frac{\left|F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2\right|}{(F_x^2+F_y^2)^{3/2}}.$$

1. *חשבו את $F_x,F_y,F_{xx},F_{xy},F_{yy}$, והוכיחו כי $\nabla F\neq 0$ בכל נקודה של C.*
2. *חשבו את העקמומיות k של C, ופשטו את הביטוי בעזרת המשוואה $xy=1$.*

3. מצאו את הנקודות על C שבהן העקמומיות מקסימלית, ואת ערכה המקסימלי.

תרגיל 4 (הליקואיד)**.** יהי $a > 0$, ונתבונן במשטח הנתון על ידי הפרמטריזציה

$$X(u,v) = (u\cos v, u\sin v, av), \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

1. הוכיחו כי X היא פרמטריזציה רגולרית של משטח, וחשבו את מקדמי התבנית היסודית הראשונה

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle .$$

2. חשבו את המטריצה ההפוכה $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$,ואת כל מקדמי גמא

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{k\ell} \left(\frac{\partial g_{j\ell}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i\ell}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^\ell} \right),$$

כאשר $u^1 = u$, $u^2 = v$.