

מבחן בחשבון אינפיניטסימלי 3 מועד א'

ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה שווה 25 נקודות. חומר עזר/מחשבון אינו מותר. ניתן להשתמש בכל טענה שהוכחה בכיתה. חייבים לנמק כל תשובה. סמנו בבירור על איזה שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות. משך הבחינה שלוש שעות.

1. תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ בכל סעיף תנו דוגמה לפונקציה $f : \mathbb{R} \rightarrow D$

שתמונתה מקיימת את התכונה הנתונה, והוכיחו את תשובתכם. יש לתת הגדרות מפורשות לפונקציות בתשובות שלכם.

א. $f(\mathbb{R})$ קומפקטית וקשירה.

ב. $f(\mathbb{R})$ אינה קשירה.

ג. $f(\mathbb{R})$ אינה קומפקטית.

2. תהי $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ מוגדרת על ידי:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \sin(3x)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

א. מצאו את תחום הרציפות של f .

ב. האם לכל נקודה $(x, y) \neq (0, 0)$ יש סביבה S כך ש $f \in C^1(S)$?

ג. האם ב $(0, 0)$ הנגזרות החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ מוגדרת? מה לגבי $\frac{\partial f}{\partial y}$?

ד. האם ב $(0, 0)$ הנגזרות החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפה? מה לגבי $\frac{\partial f}{\partial y}$?

ה. האם הפונקציה f דיפרנציאבילית ב- $(0, 0)$?

3. תהי $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי $F(x, y) = (x^2 y, xy^2)$.
- א. הוכיחו ש F הפיכה בסביבה של כל נקודה (x, y) עבורה $x \neq 0$ וגם $y \neq 0$.
- ב. מצא את הדיפרנציאל של הפונקציה ההופכית ל F בנקודה $F(2,1)$.

4. תהי $f(x, y) = x - x^2 - y^2$ מוגדרת על הדסקית $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
- א. מצאו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה f .
- ב. מיינו את הנקודות הקריטיות של הפונקציה f .

5.

- א. הגדירו תחום נורמלי ב x במישור \mathbb{R}^2 .
- ב. נסחו באופן מפורט משפט פוביני עבור פונקציה על תחום נורמלי ב x .
- ג. חישבו את האינטגרל $\iint_T e^{-x^2} dx dy$ כאשר T הוא המשולש שקודקודיו הם $(0,0), (1,0), (1,1)$.

בהצלחה!