

אינפי 3 – תרגיל 8

שאלה 1

מצאו נקודות קריטיות עבור הפונקציות הבאות וסווגו אותן:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 - 2y^2 \quad (\text{א})$$

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2 \quad (\text{ב})$$

שאלה 2

נתבונן בפונקציה:

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$$

(א) הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ היא נקודה קריטית.

(ב) הוכיחו כי ל- f יש מינימום מקומי לאורך כל קו ישר העובר דרך הראשית.

כלומר, אם נגדיר $g(t) = (at, bt)$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$, לפונקציה $f \circ g$ יש מינימום מקומי בנקודה $(0, 0)$.

(ג) הוכיחו שהנקודה $(0, 0)$ אינה נקודת מינימום של f .

שאלה 3

מצא את הנקודות הקריטיות של הפונקציה וסווג אותן:

$$f(x, y) = x^3 y^2 (1 - x - y)$$

שאלה 4

הוכיחו שהמשוואות הבאות מגדירות את z כפונקציה של המשתנים x, y בסביבת הנקודה $x^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0)$, וחשבו את הנגזרות z_x, z_y בנקודה:

(א) $F(x, y, z) = y^2 + xy + z^2 - e^z - 4 = 0$ בסביבת $(0, e, 2)$. חשבו גם את z_{yy} .

(ב) $F(x, y, z) = xz + y \ln z + x^2 = 0$ בסביבת $(-2, 0, 2)$. חשבו גם את z_{xy} .

שאלה 5

נתונה המשוואה:

$$\sqrt{x^2 + y^5 + \cos z} - 1 - 1 - z^4 = 0$$

האם המשוואה מגדירה את z כפונקציה של x, y בסביבת הנקודה $(-1, 0, 0)$? את y כפונקציה של x, z ? את x כפונקציה של y, z ?

שאלה 6

הוכיחו כי קיים כדור כלשהו $B \subseteq \mathbb{R}^4$ שמרכזו בנקודה $(2, 1, -1, -2)$, וקיימות פונקציות $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ גזירות ברציפות עבורן:

$$f(2, 1, -1, -2) = 4, g(2, 1, -1, -2) = 3$$

ולכל נקודה בכדור $(x, y, z, a) \in B$ מתקיים:

$$f^2 + g^2 + a^2 = 29, \frac{f^2}{x^2} + \frac{g^2}{y^2} + \frac{a^2}{z^2} = 17$$

שאלה 7

הוכיחו כי הפונקציה $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ הפיכה מקומית בסביבת כל נקודה אך לא הפיכה.