אינפי 3 – תרגיל 7

שאלה 1

א. יהיו $A\in\mathbb{R}^{m\times n}, b\in\mathbb{R}^m$, נגדיר $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ ע"י $g(x)=Ax+b$, ויהי $a\in\ker(g)$.
הוכיחו: $\ker(g)=a+\{R_1(A)^t,\dots,R_m(A)^t\}^\perp$
כאשר $R_i(A)$ היא השורה ה- i של A .
ז"א, $\ker(g)$ זה המרחב הניצב לשורות A (עד כדי הזזה).

ב. תהי $E\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:E\to\mathbb{R}^m$ ($f=[f_1\dots f_m]^t$) דיפרנציאבילית ברציפות ב- E . ותהי $a\in\ker(f)$.
(נניח בנוסף שהשורות של d_af בת"ל, זה פרט טכני שבהמשך הקורס נסביר למה זה צריך להתקיים).
נסמן ב- V את תת המרחב האפיני המשיק ל- $\ker(f)$ בנקודה a .
הוכיחו: $V=a+\{\nabla_a f_1,\dots,\nabla_a f_m\}^\perp$.
ז"א, המרחב המשיק ל- $\ker(f)$ בנקודה a הוא הניצב של כל הגרדיאנטים (עד כדי הזזה).

שאלה 2

בנקודה $a=(1,1,1)$, באיזה כיוון הפונקציה

$$f(x,y,z)=x\arctan(yz)$$

עולה בקצב הגדול ביותר? הגדירו וקטור זה ע"י וקטור שאורכו 1.

כמו כן, חשבו את הנגזרת של f בנקודה a בכיוון זה.

שאלה 3

נגדיר משטח ב$-\mathbb{R}^3$ על ידי: $z=x^2+y^2$.

מצאו נקודה על משטח זה, שבה המישור המשיק למשטח מאונך לוקטור $(1,1,-2)$.

שאלה 4

חשבו את הנגזרות של f בכיוון הווקטור h בנקודה a.

(א) $f(x,y) = x\sin(x+y)$, $h=(-1,0)$, $a=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)$.

(ב) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $h=(4,3,0)$, $a=(3,2,1)$.

שאלה 5

מצאו את $dg_a(h)$ עבור $g=\phi\circ f$, $a=(1,1)$, $h=\left(3,\frac{1}{2}\right)$ כאשר:

$$f(x,y) = \left(x^2+xy+1, y^2+2\right)$$

$$\phi(u,v) = \left(u+v, 2u, v^2\right)$$

שאלה 7

(תנאי ליפשיץ) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, וקבוע $M>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}^n$ מתקיים

$$|f(x)-f(y)| \le M\cdot\|x-y\|$$

הוכח/הפרך:

(א) f רציפה בכל $\mathbb{R}^n$.

(ב) f גזירה בכל $\mathbb{R}^n$.

(ג) אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות על כדור היחידה הסגור $\overline{B}=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\le 1\}$, אזי f בהכרח מקיימת את התנאי הנ"ל עבור איזשהו קבוע $M>0$, בתוך התחום $\overline{B}$.