

תרגיל בית 5 אינפי 3 תשפ"ג

1. יהי (X, d) מרחב מטרי ותהי $a \in X$
(א) הוכיחו כי הפונקציה $f_a: X \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f_a(x) = d(x, a)$ היא רציפה.
(ב) הסיקו שלכל $r > 0$ כדור סגור הוא קבוצה סגורה.

2. נגדירו $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ באופן הבא:

$$f(x, y) = \begin{cases} 8 & xy = 0 \\ \sqrt{2} & xy \neq 0 \end{cases}$$

מצאו את קבוצת נקודת הרציפות של f . האם היא פתוחה ב- \mathbb{R}^2 או סגורה?

3. האם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש?

(א) $f(x) = \sin x^2$ ב- \mathbb{R} .

(ב) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$ בתחום $D = \{(x, y): |x| \leq |y|, y \neq 0\}$.

4. תהי $f(x, y)$ פונקציה המוגדרת בתחום D ורציפה לפי המשתנה x , כלומר אם מקבעים את $y = y_0$ מקבלים פונקציה רציפה של משתנה אחד:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$$

נניח ש- f מקיימת את תנאי ליפשיץ לפי y : קיים K עבורו:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < K \cdot |y_1 - y_2|$$

האם f רציפה?

5. חשבו נקודת התכנסות של:

$$\frac{|xyzw|^{\frac{n}{3}}}{|x|^n + |y|^n + |z|^n + |w|^n}$$

עבור n חיובי.

בהצלחה!