

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה פרויקטיבית (524-88)
סמסטר ב', מועד ג', 11.10.14
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
זמן בחינה: שתי שעות וחצי

יש לענות על כל השאלות ולתת נימוק והסבר.

1. על סמך משפטי Ceva או Menelaus, הוכח:
 - א. חוצי זווית של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
 - ב. תיכונים של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
 - ג. גבהים של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
 - ד. חוצי זווית חיצוניות של משולש נפגשים עם צלעות מנוגדים בנקודות קוליניאריות.

2. השאלה הזאת עוסקת בפרויקטיביות.
 - א. הגדר פרספקטיביות בין ישרים פרויקטיביים.
 - ב. נניח שמתקיים $H(A,B,C,D)$. תהי T פרואקטיביות כאשר $T(A) = A$, $T(B) = B$, ואילו $T(C) = D$. האם בהכרח מתקיים $T(D) = C$?
 - ג. כמה פרספקטיביות נדרשות כדי להציג פרויקטיביות בין שני ישרים שונים ℓ, m במישור פרויקטיבי היא כהרכבה של פרספקטיביות? הוכח.
 - ד. יהי ℓ ישר פרויקטיבי במישור פרויקטיבי ממשי, ותהי $T: \ell \rightarrow \ell$ טרנספורמציה פרויקטיבית. האם קיימות בהכרח מספר פרספקטיביות כך שטרנספורמציה T היא הרכבתן? לנמק את התשובה.

3.
 - א. מצא העתקה פרויקטיבית f השולחת נקודות $0, 1, \infty$ לנקודות $5, 6, \frac{20}{3}$.
 - ב. מהן נקודותיה הקבועות של f אם יש?
 - ג. מצא העתקה פרויקטיבית g השולחת $2, -2, 6$ ל $0, -4, 4$.
 - ד. מהן נקודותיה הקבועות של g אם יש?

4. יהי s מעגל במישור. משולש במישור נקרא דואלי לעצמו כאשר כל קודקוד הוא פולרי (ביחס ל- s) לצלע ממול. יהי ABC משולש דואלי לעצמו.

א. הוכח שמרכז מעגל S הוא נקודת חיתוך של גבהים של משולש ABC .

ב. הוכח שאחד מן הקודקודים של ABC בהכרח נמצא בתוך המעגל ושניים מחוצה לו.

ג. הצג שרטוט מדויק כדי לאייר את חלקים א' ו-ב'.

5. מצא טרנספורמציה פרויקטיבית השולחת חתך חרוט אחד לחתך חרוט שני כלהלן:

א. אליפסה $x^2 + 2y^2 = 1$ להיפרבולה $X^2 - Y^2 = 2$.

ב. מעגל $x^2 + y^2 = 1$ לפרבולה $2Y = X^2 + 1$.

ג. היפרבולה $xy = 1$ לאליפסה $X^2 + 4Y^2 = 1$.

בהצלחה!