

**שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה פרויקטיבית (88-524)**  
**סמסטר ב', מועד ב', 24.08.12**  
**מרצה: פרופ' מיכאל כץ**  
**זמן בחינה: שלוש שעות**

**יש לענות על כל השאלות ולתת נימוק והסבר.**

1. יהי  $t$  ישר משיק למעגל ברדיוס  $r > 0$  עם מרכז  $O$ . תהי  $T$  נקודת השקה. תהי  $A$  נקודה על ישר  $t$ .
  - א. מצא משוואה המתקיימת על-ידי כמויות  $r, TA$ , והזוית  $\angle TOA$ .
  - ב. יהיו  $A, B, C, D$  נקודות שונות על  $t$ , ויהיו  $a, b, c, d$  הישרים הפולריים שלהן ביחס למעגל יחידה. האם מתקיים בהכרח שוויון  $R(A, B, C, D) = R(a, b, c, d)$ ?
  - ג. יהי  $z \in \mathbb{C}$  מספר מרוכב. נתבונן במספר  $m$  של ערכים שונים של  $R(\infty, 1, 2, z)$  תחת כל התמורות של 4 נקודות. לגבי איזה  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $m = 2$ ?
  - ד. בסימונים של סעיף ג', לאיזה  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $m = 3$ ?
  - ה. בסימונים של סעיף ג', לאיזה  $z \in \mathbb{C}$  מתקיים  $m = 4$ ?
  
2. יהיו  $p, p'$  ישרים שונים במישור פרואקטיבי. נתבונן בנקודות  $A, B, C \in p$  וגם  $A', B', C' \in p'$ .
  - א. בסימנים דלעיל, נסח ביטוי מפורט של משפט Pappus.
  - ב. שרטט ציור מדויק המהווה איור למשפט של סעיף א'.
  - ג. תרגם נקודות לישרים וגם קולינאריות לקונקורנטיות, ונסח ביטוי מדויק של משפט דואלי למשפט Pappus.
  - ד. שרטט ציור מדויק המהווה איור למשפט של סעיף ג'.
  
3. בשאלה הזאת, ניתן להשתמש באקסיומות של מישור פרואקטיבי **בלבד**.
  - א. נסח את האקסיומות של מישור פרואקטיבי.
  - ב. הוכח (על סמך אקסיומות בלבד) שאם  $A$  נקודה לא על ישר  $\ell$  אזי קיימת התאמה חד-חד ערכית בין ישרים דרך  $A$  לבין נקודות על  $\ell$ .
  - ג. נניח שבמישור פרואקטיבי, יש בדיוק  $n$  נקודות על כל ישר. מצא מספר נקודות במישור הפרואקטיבי, עם הוכחה.
  
4. על סמך משפטי Ceva וגם Menelaus, הוכח:
  - א. חוצי זוית של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
  - ב. תיכונים של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
  - ג. גבהים של משולש נפגשים בנקודה משותפת.
  
5. השאלה הזאת עוסקת בפרואקטיביות.
  - א. הגדר פרספקטיביות בין ישרים פרואקטיביים.
  - ב. הגדר פרואקטיביות בין ישרים פרואקטיביים.
  - ג. כמה פרספקטיביות נדרשות כדי להציג פרואקטיביות בין שני ישרים שונים במישור פרואקטיבי היא כהרכבה של פרספקטיביות? הוכח.
  - ד. יהי  $\ell$  ישר פרואקטיבי במישור פרואקטיבי, ו  $T: \ell \rightarrow \ell$  טרנספורמציה פרואקטיבית. האם קיימות בהכרח פרספקטיביות כך שטרנספורמציה  $T$  היא הרכבתן? לנמק את התשובה.

**ב ה צ ל ח ה !**