בס"ד

אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ו
תרגיל 9*

5 בספטמבר 2017

תאריך הגשה: יום חמישי ט"ז אלול התשע"ז, 07/09/17.

הוראות הגשה: חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

שאלה 1 הוכח או הפרך:
יהיו $G = (V, E)$ ו־$G' = (V, E')$ שני גרפים לא מכוונים על אותה קבוצת קודקודים V כך ש $E \cap E' = \emptyset$. תהי M התאמה מושלמת ב־G ותהי M' התאמה מושלמת ב־G'.
יהי $\hat{G} = (V, E \cup E')$ ותהי $\hat{M}$ התאמה מושלמת ב$\hat{G}$. אזי $|\hat{M}| \leq |M| + |M'|$.

שאלה 2 נתון גרף דו־חלקי $G = (V, U, E)$ עם פונקציית משקל $w : E \to \mathbb{R}$. כך ש$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ו$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
התאמה $M \subseteq E$ תקרא **נטולת חיתוכים** אם לכל זוג קשתות $(v_i, u_j), (v_{i'}, u_{i'}) \in E$ אם $i < i'$ אז $j < j'$. כלומר, אם בציור של ההתאמה כאשר הקוקודים מסודרים לפי הסדר קשתות ההתאמה לא יחתכו זו את זו. משקל ההתאמה הוא:
$w(M) = \sum_{e \in M} w(e)$
תאר אלגוריתם תכנות דינמי יעיל ככל הניתן אשר מוצא התאמה נטולת חיתוכים בעלת משקל מקסימומי בגרף.

*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמכן הסליחה.

שאלה 3 נתונה רשת זרימה עם מקור s ובור t שבה בנוסף לקיבולות c על הקשתות יש לנו גם קיבולות b על הקודקודים (כמה יכול לעבור **בקודקוד**). תאר אלגוריתם יעיל למציאת זרימה מקסימלית ברשת כזו, אשר אינה מפרה את הקיבולות של הקשתות או הקודוקדים. הוכח את נכונותו ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 4 נניח שברצוננו לתחזק את הסגור הטרנזיטיבי של גרף מכוון $G=(V,E)$ במהלך הכנסתן של קשתות ל־E. כלומר, לאחר הכנסתה של כל קשת, ברצוננו לעדכן את הסגור הטרנזיטיבי של הקשתות שהוכנסו עד כה. נניח שבמצבו ההתחלתי, הגרף G אינו מכיל קשתות כלל וכי יש לייצג את הסגור הטרנזיטיבי ע"י מטריצה בוליאנית.

1. הראה כיצד ניתן לעדכן בזמן $O(V^2)$ את הסגור הטרזיטיבי $G^*=(V,E^*)$ של גרף $G=(V,E)$ בעקבות הוספתה של קשת חדשה ל־G.
2. הבא דוגמה לגרף G וקשת e שעבורם דרוש $\Omega(V^2)$ זמן לעדכון הסגור הטרנזיטיבי של G לאחר הכנסת e ל־G.
3. תאר אלגוריתם יעיל לעדכון הסגור הטרנזיטיבי במהלך הכנסתן של קשתות לגרף. עבור סדרה כלשהי של n הכנסות, האלגוריתם צריך לרוץ בזמן $\sum_{t=1}^{n} t_i = O(V^3)$, כאשר t_i הוא הזמן לעדכון הסגור הטרנזיטיבי בעת שמכניסים את הקשת ה־i לגרף. הוכח שהאלגוריתם שלך משיג חסם זה.

בהצלחה!