

אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ו

תרגיל 8*

29 באוגוסט 2017

תאריך הגשה: יום שלישי י"ד אלול התשע"ז, 05/09/16.

הוראות הגשה: חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

שאלה 1 הראה דוגמא לגרף $G = (V, E)$, פונקציית משקל $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ וקודקוד מקור $s \in V$ כך ש- G מכיל בדיוק קשת שלילית אחת, אינו מכיל אף מעגל שלילי ועבורו האלגוריתם של דייקסטרה נכשל בחישוב המרחקים של כל קודקודי $v \in V$ מ- s .

שאלה 2 השלמת הוכחות מההרצאה:

1. תהי $G = (V, E)$ רשת זרימה עם קודקוד מקור $s \in V$, קודקוד בור $t \in V$ וזרימה $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$. נסמן לכל זוג קבוצות $X, Y \subseteq V$

$$f(X, Y) = \sum_{x \in X} \sum_{y \in Y} f(x, y)$$

יהיו שלוש קבוצות $X, Y, Z \subseteq V$. הוכיחו:

(א) $f(X, X) = 0$

(ב) $f(X, Y) = -f(Y, X)$

(ג) אם $X \cap Y = \emptyset$ אז:

*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמכן הסליחה.

$$f(X \cup Y, Z) = f(X, Z) + f(Y, Z) \quad .i$$

$$f(Z, X \cup Y) = f(Z, X) + f(Z, Y) \quad .ii$$

2. נתונה רשת זרימה G וזרימה f . יהי P מסלול שיפור. הוכיחו כי הפונקציה

$$f_P(u, v) = \begin{cases} c_f(P) & (u, v) \in P \\ -c_f(P) & (v, u) \in P \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

היא זרימה ב G_f שערכה $|f_P| = c_f(P) > 0$.

שאלה 3 נתון גרף מכוון $G = (V, E)$, וזוג קודקודים $s, t \in V$. תאר אלגוריתם המוצא את מספר מקסימלי של מסלולים זרים מ- s ל- t בגרף. הוכח את נכונותו ונתח את סיבוכיותו.

שאלה 4 נתונה רשת זרימה $G = (V, E)$, זוג קודקודים $s, t \in V$, קיבולת c **בשלמים** על הקשתות וזרימה מקסימומית f , וקשת (u, v) ברשת.

1. מצאו זרימה מקסימומית ברשת מ- s ל- t תחת הקיבולת המוגדרת ע"י הוספת 1 לקיבולת הקשת (u, v) ב- c .

2. מצאו זרימה מקסימומית ברשת מ- s ל- t תחת הקיבולת המוגדרת ע"י הפחתת 1 מקיבולת הקשת (u, v) ב- c . ניתן להניח שקיבולת הקשת (u, v) היא לפחות 1.

בהצלחה!