

אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ז

תרגיל 6*

22 באוגוסט 2017

תאריך הגשה: יום חמישי ב' אלול התשע"ז, 24/08/17.

הוראות הגשה: חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

שאלה 1

הגדרה: יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון, נגדיר את **גרף רכיבי הקשירות החזקה של G** , $G^{SCC} = (V^{SCC}, E^{SCC})$ כך ש V^{SCC} היא קבוצת הרכיבים הקשירים היטב, ולכל זוג רכיבים $C_1, C_2 \in V^{SCC}$ מתקיים $(C_1, C_2) \in E^{SCC}$ אם ורק אם קיימים $v_1 \in C_1$ ו- $v_2 \in C_2$ כך ש- $(v_1, v_2) \in E$ (שימו לב, ייתכן שיש הרבה זוגות קודקודים כאלה). יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון. הצע אלגוריתם הרץ בזמן לינארי המוצא גרף $G' = (V, E')$ כך ש $G^{SCC} = G'^{SCC}$ והגודל של E' מינימלי.

שאלה 2 נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל **לקודקודים** $w : V \rightarrow \mathbb{R}$. נגדיר משקל-קודקודים לעץ פורש T של G כסכום של משקלי הקודקודים כפול דרגתם. כלומר, אם דרגת קודקוד v בעץ T היא $rank(v)$ אז משקל-קודקודים של T הוא:

$$vertices - weight(T) = \sum_{v \in V} w(v) \cdot rank(v)$$

הציעו אלגוריתם המוצא עץ פורש של G עם משקל-קודקודים מינימלי.

*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמך הסליחה.

שאלה 3 נתון גרף קשיר לא מכוון $G = (V, E)$ ופונקציית משקל $w : E \rightarrow \{1, 2\}$. כלומר, משקל כל קשת בגרף הוא 1 או 2.

הציעו אלגוריתם המוצא עץ פורש מינימלי של G .

שאלה 4 בשיעור הוכחנו שמספר האיברים במבנה הנתונים של Union Find עם איחוד ע"פ דרגה ודחיסת מסלולים שדרגתם בטווח בין $t + 1$ ל- 2^t הוא לכל היותר $n/2^t$. הוכיחו:

1. לכל איבר x , במעבר על המסלול מ- x לשורש של העץ המכיל את x ישנם לכל היותר $O(\log^* n)$ זוגות איברים (אב ובן) כך שדרגת האב ודרגת הבן נמצאות בטווחים שונים (ע"פ החלוקה לטווחים של הפונקציה $(\log^*(\cdot))$).

2. העלות לשיעורין של פעולת MAKE-SET ו FIND-SET היא $O(\log^* n)$ (רמז: חלקו את העלות לפעולה למעברים מאב לבן שנמצאים באותו טווח ומעברים מאב לבן שנמצאים בטווחים שונים).

בהצלחה!