

אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ז תרגיל 4*

כ"ד באב, תשע"ז
16 באוגוסט 2017

תאריך הגשה: יום חמישי כ"ה אב התשע"ז, 17/08/17.

הוראות הגשה: חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

לבעיות 1-3 בתרגיל זה עליכם לתאר אלגוריתם תכנות דינמי שפותר אותן. שימו לב לא לפספס את הדברים הבאים:

1. א. אלגוריתם נאיבי שכולל:

- (א) חישוב קומבינטורי של מספר האפשרויות הקיימות.
- (ב) סינון האפשרויות הלא חוקיות (אם קיימות).

2. ב. אלגוריתם רקורסיבי שכולל:

- (א) נוסחא רקורסיבית
- (ב) תנאי עצירה
- (ג) הסבר רעיוני של הנוסחא ומשמעות של כל אינדקס ומשתנה בנוסחא.
- (ד) נוסחת נסיגה המתארת את סיבוכיות זמן הריצה (אין צורך לפתור אותה).
- (ה) הוכחת נכונות של הנוסחא הרקורסיבית

3. ג. אלגוריתם תכנות דינמי שכולל:

- (א) תאור מבנה הנתונים (מערך, עץ, טבלה, וכו')
- (ב) גודל המבנה
- (ג) מה מכילה יחידה בודדת בתוך המבנה

*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמך הסליחה.

(ד) אופן מילוי המבנה

i. תנאי עצירה

ii. איך משתמשים בנוסחא הרקורסיבית

iii. סדר מילוי היחידות (מלמעלה למטה, משמאל לימין, וכדומה)

(ה) פסאדו קוד לאלגוריתם

(ו) ניתוח סיבוכיות זמן ומקום – ולציין אם ניתן לצמצם שימוש בזיכרון (איך ולכמה).

(ז) שחזור פיתרון (אם רלוונטי)

שאלה 1 עבור מערך $A[1..n]$ הסדרה $\langle i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \rangle$ כך ש $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k = n$ הם חלוקת k של המערך. נגדיר סכום-מכפלת- k בתור

$$\text{sum-prod}(A, \langle i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \rangle) = \sum_{j=1}^k \prod_{m=i_{j-1}+1}^{i_j} A[m]$$

כלומר, אנחנו מסתכלים בנפרד על כל מקטע של המערך בין $A[i_{j-1}+1]$ ל $A[i_j]$ וכופלים את כל האיברים במקטע הזה. כך מתקבלות k מכפלות נפרדות, שסכומן הוא סכום-מכפלת- k של A .

לדוגמה, באיור 1 נתון מערך, ושתי חלוקות-3 (כלומר, $k=3$) שונות שלו. החלוקה הראשונה היא $\langle 3, 8 \rangle$ והשנייה היא $\langle 2, 6 \rangle$ ערכי סכומי המכפלה הם:

$$\text{sum-prod}(A, \langle 3, 8 \rangle) = 3 \cdot 2 \cdot 9 + 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 + 9 = 54 + 28 + 9 = 91$$

$$\text{sum-prod}(A, \langle 2, 6 \rangle) = 3 \cdot 2 + 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 9 = 6 + 36 + 63 = 105$$

3	2	9	1	2	2	1	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

3	2	9	1	2	2	1	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

3	2	9	1	2	2	1	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

איור 1: דוגמה לסכום מכפלה

בעיית סכום-מכפלה-מינימלי

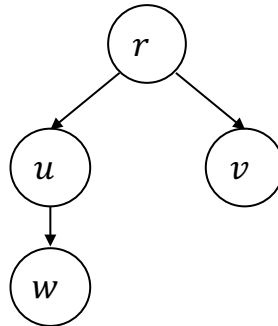
קלט: מערך $A[1..n]$ ומספר טבעי $1 \leq k \leq n$

פלט: חלוקת- k של המערך שסכום-מכפלת- k שלה מינימלי.

שאלה 2 יהי T עץ מושרש עם שורש r (לא בהכרח בינארי). ל- r יש הודעה M , וברצונו לשלוח את ההודעה לכל שאר הקודקודים. לשלוח הודעה מקודקוד לבן שלו לוקח יחידת זמן אחת.

אם היה ניתן, r היה שולח את ההודעה שלו לכל הבנים שלו באותו זמן, והם היו שולחים לבנים שלהם וכו'. הזמן שייקח תלוי במרחק המקסימלי של קודקוד כלשהו מ- r (=גובה העץ). אבל, יש לנו מגבלה נוספת. כל קודקוד יכול לשלוח הודעה אחת בזמן מסוים רק לאחד מהבנים שלו.

לדוגמה בעץ הבא:



אפשרות אחת היא שביחידת הזמן הראשונה r ישלח את M ל- v , ביחידת הזמן השנייה r ישלח את M ל- u , וביחידת הזמן השלישית u ישלח את M ל- w . זה ייקח שלוש יחידות זמן.

אפשרות נוספת היא שביחידת הזמן הראשונה r ישלח את M ל- u , וביחידת הזמן השנייה r ישלח את M ל- v , ו- u ישלח את M ל- w . זה ייקח שתי יחידות זמן.

בעיית *broadcast* על עץ

קלט: עץ T עם שורש r (נתון)

פלט: הזמן המינימלי שנדרש על מנת שההודעה M שנמצאת אצל r תגיע לכל הקודקודים תחת המגבלה שצוינה לעיל.

שאלה 3 נסמן ב- $r[i, j]$ את אינדקס המפתח שהוא שורש של עץ חיפוש בינארי אופטימלי. נתונה הלמה הבאה (מאת Knuth):

קיים עץ חיפוש בינארי אופטימלי, עבורו מתקיים $r[i, j - 1] \leq r[i, j] \leq r[i + 1, j]$.
 העזרו בלמה הזו, על מנת לשפר את האלגוריתם למציאת עץ חיפוש אופטימלי, כך שיעבוד בזמן $O(n^2)$ (להזכרכם, בכיתה ראינו אלגוריתם בזמן $O(n^3)$).

שאלה 4 נתונים k מערכים A_1, A_2, \dots, A_k ממוינים בסדר לא-יורד, בגדלים n_1, n_2, \dots, n_k בהתאמה.

עלות מיזוג שני מערכים בגדלים m ו- n היא $O(n + m)$ באמצעות השיטה MERGE (בה) או משתמשים במיזוג (מיזוג), וגודלו של המערך הממוזג הוא בדיוק $n + m$.

מטרתנו למזג את כל המערכים למערך אחד ממוין ארוך. לצורך כך, אנו מעוניינים למצוא סדר מיזוגים מינימלי - כך שעלות פעולות המיזוג תהיה מינימלית. הציעו אלגוריתם המוצא סדר מיזוג אופטימלי. (שימו לב, השאלה לא עוסקת במיזוג המערכים עצמם, אלא רק בסדר לביצוע פעולות המיזוג).

שאלה 5 לא להגשה

נתון האלגוריתם הבא לפתרון בעיית הכפלת שרשרת מטריצות-
 $(m_1 = p_1 \times p_2, m_2 = p_2 \times p_3)$ וכן הלאה).

```

MATRIX-MULT( $P = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ )
   $Sum \leftarrow 0$ 
  While ( $k > 2$ )
     $p_i \leftarrow \text{FIND MAX}(p_2, p_3, \dots, p_{k-1})$ 
     $q \leftarrow (p_{i-1} \cdot p_i \cdot p_{i+1})$ 
     $Sum \leftarrow Sum + q$ 
     $P \leftarrow (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k)$ 
  return  $Sum$ 

```

האם האלגוריתם הנ"ל מחזיר את הפתרון האופטימאלי עבור הבעיה? הוכיחו שכן או הביאו דוגמא נגדית.

בהצלחה!