

# אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ו תרגיל 3\*

כ"א באב, תשע"ז  
13 באוגוסט 2017

**תאריך הגשה:** יום שלישי כ"ג אב התשע"ז, 15/08/17.

**הוראות הגשה:** חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

לבעיות בתרגיל זה עליכם לתאר אלגוריתם תכנות דינמי שפותר אותן.  
שימו לב לא לפספס את הדברים הבאים:

1. א. אלגוריתם נאיבי שכולל:

(א) חישוב קומבינטורי של מספר האפשרויות הקיימות.

(ב) סינון האפשרויות הלא חוקיות (אם קיימות).

2. ב. אלגוריתם רקורסיבי שכולל:

(א) נוסחא רקורסיבית

(ב) תנאי עצירה

(ג) הסבר רעיוני של הנוסחא ומשמעות של כל אינדקס ומשתנה בנוסחא.

(ד) נוסחת נסיגה המתארת את סיבוכיות זמן הריצה (אין צורך לפתור אותה).

(ה) הוכחת נכונות של הנוסחא הרקורסיבית

3. ג. אלגוריתם תכנות דינמי שכולל:

(א) תאור מבנה הנתונים (מערך, עץ, טבלה, וכו')

---

\*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמך הסליחה.

- (ב) גודל המבנה  
 (ג) מה מכילה יחידה בודדת בתוך המבנה  
 (ד) אופן מילוי המבנה  
 i. תנאי עצירה  
 ii. איך משתמשים בנוסחא הרקורסיבית  
 iii. סדר מילוי היחידות (מלמעלה למטה, משמאל לימין, וכדומה)  
 (ה) פסאדו קוד לאלגוריתם  
 (ו) ניתוח סיבוכיות זמן ומקום – ולציין אם ניתן לצמצם שימוש בזיכרון (איך ולכמה).  
 (ז) שחזור פיתרון (אם רלוונטי)

**שאלה 1** נתבקשתם לסייע לחברה מפורסמת לארגן מסיבה לעובדיה. בחברה ישנם  $n$  עובדים, ולכל עובד (פרט למנכ"ל) יש מנהל ישיר אחד בדיוק. יחסי העבודה בחברה מתוחים, וסיטואציה בה עובד ומנהלו נמצאים במסיבה, צפויה להרוס את המסיבה. לדוגמה, אם המנכ"ל שמו קמצא, ולו יש עובד ששמו בר קמצא, שהוא מנהל של זכריה. מסיבה בה ישתתפו זכריה וקמצא, תסב הנאה רבה לשניהם. אולם, אם במקום קמצא, תזמינו בטעות את בר קמצא, תוצאות המסיבה עלולות להיות הרוט אסון. כל עובד המוזמן למסיבה מביא עמו את כל בני משפחתו (אשר גודלה ידוע מראש והיא זרה לקבוצת העובדים או למשפחות העובדים האחרים). תכננו אלגוריתם הקובע אילו אנשים יש להזמין למסיבה על מנת למקסם את מספר המשתתפים במסיבה, ללא הריסתה. הניחו שנתון עץ מושרש  $T$ , כך שלכל קודקוד  $v_i \in T$  יש מספר  $f_i$  שהוא מספר בני המשפחה של העובד  $v_i$ . הוכיחו את נכונות האלגוריתם, ונתחו סיבוכיות זמן ומקום.

**שאלה 2** מחרוזת היא סדרה של תווים מעל אלף-בית מסוים. בעיית מציאת חלוקה של מחרוזת לשתי תתי מחרוזות: קלט: שלוש מחרוזות  $X, Y, Z$  כך ש-  $|X| + |Y| = |Z|$  (כאשר  $|v|$  הוא אורך המחרוזת  $v$ ). פלט: האם ניתן לחלק את  $Z$  לשתי תתי מחרוזות  $Z_1, Z_2$  כך ש-  $Z_1 = X$  ו-  $Z_2 = Y$  ושילוב של  $Z_1$  ו-  $Z_2$  יוצר בדיוק את המחרוזת  $Z$ . הגדרה פורמאלית:

$$\begin{aligned} Z &= z_1 z_2 \dots z_n & n &= m + k \\ X &= z_{i_1} z_{i_2} \dots z_{i_m} & i_1 &< i_2 < \dots < i_m \\ Y &= z_{j_1} z_{j_2} \dots z_{j_k} & j_1 &< j_2 < \dots < j_k \\ \forall 1 \leq s \leq m, 1 \leq t \leq k : & i_s \neq j_t \end{aligned}$$

**הערה:** שימו לב שהאלגוריתם שמחפש את תתי המחרוזות  $X$  כתת מחרוזת של  $Z$  ובודק אם שאר תתי המחרוזות שנשארה היא  $Y$  לא תמיד נכון. למשל במקרה הבא:

$$\begin{aligned} X &= abcd \\ Y &= bbde \\ Z &= abbcbded \end{aligned}$$

נשים לב שניתן לחלק את  $Z$  לשתי תתי מחרוזות שוות ל- $X$  ו- $Y$  אבל אם נחפש את המופע הראשון של  $X$  נקבל שיתר המחרוזת תהיה  $bbde$ ,  $Y \neq bbde$ , ובאופן דומה, אם נחפש את המופע הראשון של  $Y$  אז יתר המחרוזת תהיה  $abcd$ .  $X \neq acbd$ .

**שאלה 3 הגדרה:** בהינתן סדרה של מספרים  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , תת סדרה "2-מוגבלת" היא תת סדרה  $A'$  של  $A$  מהצורה  $A' = (a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k})$  כאשר  $i_1 < i_2 < \dots < i_k$  כך ש- $i_1 = 1, i_k = n$  ולכל  $1 \leq j < k$  מתקיים  $i_{j+1} - i_j \leq 2$ . הערך של תת הסדרה  $A'$  הוא  $\sum_{j=1}^k a_{i_j}$ .

מציאת תת-סדרה "2-מוגבלת" מקסימומית

קלט: סדרה של מספרים  $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

פלט: תת סדרה "2-מוגבלת" של  $A$  בעלת ערך מקסימום.

דוגמא: עבור  $A = (1, -3, 7, 8, -10, -15, -7, 5)$  הפיתרון המקסימומי מתקבל מתת הסדרה  $A' = (1, 7, 8, -15, 5)$  שערכה 6. עבור  $A = (1, -3, 7, 8, -10, -7, 5)$  הפיתרון המקסימומי מתקבל מתת הסדרה  $A' = (1, 7, 8, -7, 5)$  שערכה 14.

#### שאלה 4

נגדיר סדרה של מספרים, המוגדרת לכל  $n \in \mathbb{N}$  באופן הבא ( $g_n$  מסמן את האיבר ה- $n$  בסדרה):

$$g_n = \begin{cases} 1 & n = 1, 2, 3 \\ g_{n-1} + g_{n-2} + g_{n-3} & n \geq 4 \end{cases}$$

1. הצע אלגוריתם **תכנות דינמי** אשר בהינתן  $n$  טבעי מחשב את  $g_n$ .
2. הצע אלגוריתם מהיר יותר לבעיה.

**בהצלחה!**