

# אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ז

## תרגיל 2\*

י"ח באב, תשע"ז  
10 באוגוסט 2017

**תאריך הגשה:** יום ראשון כ"ב אב התשע"ז, 13/08/17.

**הוראות הגשה:** חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

### שאלה 1

ברצוננו להכפיל את הפולינומים  $2 + 7x^2$  ו  $3x + 5$ .

1. בחר את חזקת 2 המתאימה לביצוע החישוב.
2. מצא את תוצאת הפעלת FFT עבור שני הפולינומים (הראו גם את תוצאות הקריאות הרקורסיביות של האלגוריתם).
3. הכפל את התוצאות שהתקבלו בכל אחת מהנקודות.
4. חשב את ה FFT ההפוך לקבלת תוצאת הכפל בייצוג מקדמים.

**שאלה 2** נתון פולינום  $A(x)$  מדרגה חסומה  $n$ . ניתן לחשב את הערך של  $A(x_0)$  ע"י חלוקה של  $A(x)$  בפולינום  $(x - x_0)$  ע"מ לקבל פולינום  $q(x)$  מדרגה חסומה  $n - 1$ , ומספר  $r$  כך  $A(x) = q(x)(x - x_0) + r$ . ברור כי  $A(x_0) = r$ . הראו כיצד בהינתן  $A(x)$  ו  $x_0$ , ניתן לחשב את  $q(x)$  ואת  $r$  בזמן  $O(n)$ , כאשר  $A(x)$  נתון ע"י המקדמים שלו.

---

\*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמכן הסליחה.

**שאלה 3** בהינתן פולינום  $A(x)$  מדרגה חסומה  $n$  בייצוג של  $n$  נקודות, ניתן לעשות אינטרפולציה ל- $A(x)$  לייצוג של מקדמים בעזרת נוסחת Lagrange:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n-1} y_k \frac{\prod_{j \neq k} (x - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}$$

הראו כיצד ניתן להשתמש בנוסחת Lagrange על מנת לעשות אינטרפולציה ב- $O(n^2)$  זמן. **רמז:** קודם כל חשבו את  $\prod (x - x_j)$  ואח"כ חלקו ב- $(x - x_k)$  לפי הצורך. בשביל המונה של כל איבר בסכום – כדאי להשתמש בשאלה 2.

**שאלה 4 הגדרה:** קבוצת הסכום של זוג קבוצות  $A, B$  היא:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

נתונה קבוצה של  $n$  מספרים שלמים בטווח  $[1, 10n^{1.5}]$  השמורה במערך  $A[1..n]$ . כלומר, לכל אינדקס  $1 \leq i \leq n$  מתקיים  $A[i] \in [1, 10n^{1.5}]$ . הצע אלגוריתם המחזיר את איברי הקבוצה  $A + A$  בזמן אופטימלי.

**בהצלחה!**