

אלגוריתמים 1 - קיץ תשע"ז

תרגיל 1*

י"ז באב, תשע"ז
9 באוגוסט 2017

תאריך הגשה: יום חמישי י"ח באב התשע"ז 10/08/17

הוראות הגשה: חל איסור חמור על החזקת פתרונות של סטודנטים אחרים. על כל סטודנט לרשום את תשובותיו **עצמאית** ובמילותיו שלו. כל אפשרות אחרת תחשב להעתקה. לכל אלגוריתם יש לתת הסבר מספק מדוע הוא עובד, וכמו כן ניתוח של זמן ריצה. עליכם לתת את האלגוריתם עם זמן הריצה הטוב ביותר שאליו אתם יכולים להגיע (גם אם לא מצוין מהו).

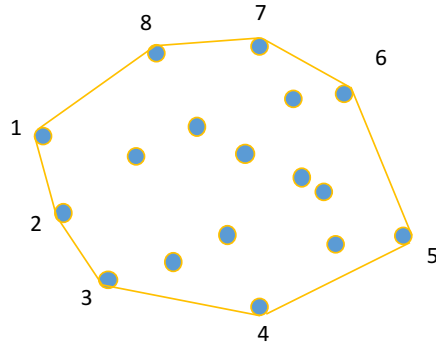
שאלה 1 הגדרה: במערך A של n מספרים, תת-מערך הוא זוג אינדקסים i, j כך ש- $1 \leq i \leq j \leq n$.
ערך של תת מערך הוא הסכום $A[i] + A[i+1] + \dots + A[j]$. תת-מערך מקסימלי הוא תת-מערך שערכו מקסימלי.
הצע אלגוריתם אשר בהינתן מערך A מוצא תת-מערך מקסימלי של A . זמן הריצה של האלגוריתם יהיה $O(n \log n)$.

נתון מערך ממוין $A[1..n]$ בעל n מספרים שלמים שונים. הצע אלגוריתם הפרד ומשול המוצא אינדקס $1 \leq i \leq n$ כך ש- $A[i] = i$ אם קיים i כזה.

שאלה 2 סגור קמור

הגדרה: מצולע קמור הוא מצולע שכל הזוויות הפנימיות שלו קטנות מ- 180° .
הגדרה: הסגור הקמור של קבוצת נקודות $A = \{(x_i, y_i) | 1 \leq i \leq n\}$, הוא המצולע הקמור הקטן ביותר המכיל את כל נקודות הקבוצה (קודקודיו הם נקודות מהקבוצה).
נתונה קבוצת A של n נקודות במישור, כך שכל שלוש נקודות לא נמצאות על ישר אחד, והקורדינאטות של כל נקודה ייחודיות - כלומר לא קיימות שתי נקודות עם אותו ערך x או עם אותו ערך y .

*השאלון מנוסח בלשון זכר אך מכוון לסטודנטיות באותה המידה, עמך הסליחה.



איור 1: סגור קמור של קבוצת נקודות.

הצע אלגוריתם הפרד ומשול המוצא את הסגור הקמור של קבוצת הנקודות. הפלט של האלגוריתם הוא קודקודי הסגור הקמור בסדר מתאים, החל מהנקודה השמאלית ביותר (בעלת שיעור x קטן ביותר), נגד כיוון השעון. דוגמה לסגור קמור מופיעה באיור, המספרים מסמנים את הסדר של הנקודות שהאלגוריתם צריך להחזיר.

שאלה 3 נתון מערך דו ממדי $A[0..n-1, 0..m-1]$, המייצג מפה טופוגרפית של שטח מסוים. המספר $A[i, j]$ הוא הגובה של השטח בנקודה (i, j) . כאשר יורד גשם על השטח, מים נקווים בנקודות (i, j) אשר נמוכות מכל הנקודות השכנות להן, כלומר מהנקודות $(i-1, j)$, $(i+1, j)$, $(i, j-1)$ ו $(i, j+1)$ (לא מסתכלים על האלכסונים). בנקודות אשר סמוכות לקצוות, השכנים שלא קיימים הם קירות, ולכן המים יקוו בהם (למשל ל $A[0, 0]$ יש לכל היותר שני שכנים $A[1, 0]$ ו $A[0, 1]$ ואם הוא קטן מהם, המים יקוו בו). בנוסף, ניתן להניח שכל הערכים במפה שונים זה מזה.

1. במקרה בו $m = 1$, כלומר המערך הוא מערך חד מימדי - הצע אלגוריתם הפרד ומשול המוצא נקודה כלשהי בה נקווים מים.
2. הצע אלגוריתם הפרד ומשול אחר, עבור המקרה בו $m = n$. נתח את זמן הריצה שלו בעזרת נוסחת נסיגה.

בהצלחה!