מבני נתונים - תרגיל 3
פתרונות

גלעד אשרוב

30 במאי 2014

תרגיל 1. פתרו את התרגיל הבא **שתי** פעמים (פסח מתקרב..), בכל פעם עם שיטה אחרת שראינו בכיתה (כלומר, בשיטת האיטרציה ובשיטת האינדוקציה). מצאו חסם הדוק לנוסחא הבאה:

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/3) + n & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

פתרון: בפתרון זה נסתפק רק בעזרת אחת מהשיטות. נפתור לפי אינדוקציה. "ננחש" שהפתרון הוא $\Theta(n \log n)$. כעת נוכיח חסם עליון וחסם תחתון:

טענה 1. $T(n) \in \Omega(n \log n)$. כלומר, קיימים קבועים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) > c \cdot n \log n$$

הוכחה: נתחיל מהצעד. נניח שהטענה מתקיימת עבור $n/3$. כלומר, נניח כי:

$$T\left(\frac{n}{3}\right) > c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3}$$

כעת:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n/3) + n > 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + n = c \cdot n \log \frac{n}{3} + n = c \cdot n \log n - c \cdot n \log 3 + n \\ &\geq c \cdot n \log n - 2 \cdot c \cdot n + n \end{aligned}$$

אנחנו רוצים ש $T(n) > cn \log n$. הנ"ל מתקיים אם:

$$\begin{aligned} -2 \cdot c \cdot n + n &\geq 0 \\ -2 \cdot c \cdot n &\geq -n \\ c &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן נקבע: $c = 1/2$.

בסיס: נבדוק החל מאיזה n מתקיים:

$$T(n) > \frac{1}{2} n \log n$$

עבור $n=3$ מתקיים:

$$T(3) = 3T(1)+3=6$$

מהצד השני:

$$\frac{1}{2}\cdot 3\log 3 \approx 2.377$$

ולכן $n_0=3$. ■

נוכיח חסם עליון:

טענה 2. $T(n)\in O(n\log n)$. כלומר, קיימים קבועים c,n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים:

$$T(n) < c\cdot n\log n$$

הוכחה: נניח שמתקיים:

$$T(n/3) < c\cdot \frac{n}{3}\log\frac{n}{3}$$

נראה את הצעד:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3\cdot T(n/3)+n < 3\cdot\left(c\cdot\frac{n}{3}\log\frac{n}{3}\right)+n = c\cdot n\log\frac{n}{3}+n = cn\log n - cn\log 3 + n \\ &\leq cn\log n - cn + n \end{aligned}$$

נבדוק מתי הנ"ל קטן מ- $c\cdot n\log n$. מתקיים:

$$\begin{aligned} cn\log n - cn + n &\leq c\cdot n\log n \\ -cn &\leq -n \\ c &\geq 1 \end{aligned}$$

ולכן נקח $c=2$, למשל.

בסיס: עבור $n=3$ מתקיים: $T(3)=3T(1)+3=6$. מהצד השני: $6\log 3>6$ ומתקיים:

$$T(3)=3T(1)+3=6<2\cdot 3\cdot\log 3$$

■

שאלה 2. מצאו חסם הדוק אסימפטוטית לנוסחאות הנסיגה הבאות:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{n-1}\left[T(i)-T(i-1)\right] \\ T(0) &= 0, \quad T(1)=1 \end{aligned}$$

רמז: השתמשו בכך ש: $\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\in\Theta(\log k)$.

פתרון. נשים לב כי $\sum_{i=1}^{n-1}[T(i)-T(i-1)] = T(n-1)-T(0) = T(n-1)$. לכן, את הנוסחא ניתן לכתוב כך:

$$\begin{aligned} T(n) &= \frac{1}{n}+T(n-1) \\ T(0) &= 0, \quad T(1)=1 \end{aligned}$$

לאחר שנציב את הנוסחא בעצמה פעם אחת, נקבל:

$$T(n) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+T(n-2)$$

פעם נוספת:

$$T(n) = \frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n-2}+T(n-3)$$

ובאופן כללי:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{n-k}+T(n-i)$$

כאשר נגיע ל־ $i=n-1$ נגיע לתנאי העצירה $T(1)=1$, ונקבל:

$$T(n) = \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n-k}+1 = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \in \Theta(\log n)$$

תרגיל 3. הציגו חסם הדוק אסימפטוטית לנוסחא הבאה: $T(n) = T(n/2+\sqrt[3]{n^2})+10$

פתרון. קל לראות כי $n/2 > \sqrt[3]{n^2}$ כמעט לכל n, ולכן, נסתכל על הנוסחא כאילו היא: $S(n) = S(n/2)+10$. ראינו בכיתה שנוסחא כזו הולכת ל ־ $\Theta(\log n)$. כעת נוכיח שהנוסחא המקורית היא גם ב $\Theta(\log n)$.

טענה 3. קיימים שני קבועים, $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) \le c\cdot\log n$$

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה על n. נתחיל עם הצעד, נניח שעבור $n/2+\sqrt[3]{n^2}$ מתקיים:

$$T(n/2+\sqrt[3]{n^2}) \le c\cdot\log\left(n/2+\sqrt[3]{n^2}\right)$$

ולכן:

$$T(n) \;=\; T(n/2+\sqrt[3]{n^2})+10 \le c\cdot\log\left(n/2+\sqrt[3]{n^2}\right)+10$$

החל מ $n_0=8$, נקבל כי: $\sqrt[3]{n^2} \le n/2$, ולכן נקבל:

$$T(n) \le c\cdot\log\left(n/2+\sqrt[3]{n^2}\right)+10 \le c\cdot\log\left(3n/4\right)+\cdot 10$$

אנו שואלים עבור איזה c הנ"ל קטן מ - $c\log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c\cdot\log(3n/4)+10 &\leq c\log n \\ 10 &\leq c\cdot(\log n-\log(3n/4)) = c\cdot(\log 4/3) \\ \frac{10}{\log(4/3)} &\leq c \end{aligned}$$

ונקבל כי עבור c כנ"ל, ועבור $n\geq 8$, צעד האינדוקציה מתקיים.
בסיס: השלם לבד. ∎

מהנ"ל אנו מסיקים כי $T(n)\in O(\log n)$. כעת נראה חסם תחתון.

טענה 4. קיימים קבועים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים:

$$T(n)\geq c\cdot\log n$$

הוכחה: צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n/2+\sqrt[3]{n^2}$ שמתקיים:

$$T(n/2+\sqrt[3]{n^2})\geq c\cdot\log\left(n/2+\sqrt[3]{n^2}\right)$$

נקבל:

$$T(n)=T(n/2+\sqrt[3]{n^2})+10\geq c\cdot\log\left(n/2+\sqrt[3]{n^2}\right)+10\geq c\cdot\log(n/2)+10$$

אנו שואלים מתי הנ"ל גדול מ - $c\cdot\log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c\cdot\log(n/2)+10 &\geq c\cdot\log n \\ 10 &\geq c\cdot\log 2 \\ 10 &\geq c \end{aligned}$$

וקיבלנו שצעד האינדוקציה נכון לכל c קטן מספיק.
בסיס - השלם לבד. ∎

תרגיל 4. נתונה הנוסחא הבאה (כאשר a,b,c קבועים):

$$T(n)=\begin{cases} aT(n/b)+n^c & \text{if } n>1 \\ 1 & \text{if } n=1 \end{cases}$$

אזי, לכל n (כאשר ניתן להניח ש-n היא חזקה שלמה של b), הוכח כי:

1. אם $\log_b a<c$, אזי $T(n)=\Theta(n^c)$.
2. אם $\log_b a=c$, אזי $T(n)=\Theta(n^c\log n)$.
3. אם $\log_b a>c$, אזי $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$.

הדרכה: פתרו את הנוסחא באופן כללי, עד שתגיעו לביטוי מהצורה: $T(n)=A\cdot T(1)+B$. כעת פתרו לפי המקרים.
במקרים 3,1 העזרו בשיוויון: $x^{\log_y z}=z^{\log_y x}$ (והוכיחו את שיוויון זה)

פתרון: נציב את הנוסחא בעצמה פעם אחת. נקבל:

$$T(n)=aT(n/b)+n^c=a(aT(n/b^2)+(n/b)^c)+n^c=a^2T(n/b^2)+n^c+a(n/b)^c$$

אם נמשיך להציב את הנוסחא i פעמים, נקבל:

$$T\left(n\right)=a^i\cdot T\left(\frac{n}{b^i}\right)+\sum_{k=0}^{i-1}\frac{n^c\cdot a^k}{b^{c\cdot k}}=a^i\cdot T\left(\frac{n}{b^i}\right)+n^c\cdot\sum_{k=0}^{i-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

כעת, נבדוק מתי נגיע לתנאי העצירה:

$$\begin{aligned}\frac{n}{b^i}&=1\\ i&=\log_b n\end{aligned}$$

ונקבל נוסחא כללית:

$$T(n)=a^{\log_b n}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

נשים לב כי לכל x,y,z חיוביים, מתקיים $x^{\log_y z}=z^{\log_y x}$, ולכן:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

בנוסף, נתבונן בביטוי שבתוך הסכום: $\frac{a}{b^c}$. ביטוי זה שווה 1 כאשר $c=\log_b a$. כעת, נחלק למקרים:

1. אם $\log_b a<c$, אזי $b^c>a$, ונקבל אם כן כי $\frac{a}{b^c}$ הוא איזשהו קבוע r שקטן ממש מ-1. לפיכך, מתקיים כי:

$$r\leq\sum_{k=0}^{\log_b n-1}r^k\leq\sum_{k=0}^{\infty}r^k\leq\frac{1}{1-r}$$

ונקבל בסה"כ:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k\leq n^c+n^c\cdot\frac{1}{1-r}=\left(1+\frac{1}{1-r}\right)\cdot n^c$$

ומהצד השני:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k\geq 0+r\cdot n^c=r\cdot n^c$$

ולכן, בסה"כ $T(n)\in\Theta(n^c)$.

2. במקרה ו- $\log_b a=c$, נקבל כי: $\frac{a}{b^c}=1$, ולכן:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k=n^c+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}1=n^c+n^c\cdot\log_b n$$

ולכן $T(n)\in\Theta(n^c\log_b n)$.

3. במקרה ו- $\log_b a > c$ נקבל כי $\frac{a}{b^c}$ הוא איזשהו קבוע גדול מ-1, ולפי סכום סדרה הנדסית:

$$\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)=\frac{\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n-1}-1}{\frac{a}{b^c}-1}\in\Theta\left(\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right)$$

ולכן הנוסחא כולה היא ב- $T(n)\in\Theta(n^c\cdot\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n})$. אבל, נשים לב כי:

$$n^c\cdot\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n} = n^c\cdot\frac{a^{\log_b n}}{(b^c)^{\log_b n}}=n^c\cdot\frac{n^{\log_b a}}{n^{\log_b b^c}}=n^c\cdot\frac{n^{\log_b a}}{n^c}=n^{\log_b a}$$

ולכן הנוסחא כולה היא ב: $T(n)\in\Theta(n^{\log_b a})$.