# מבני נתונים 89-120
# תרגיל 1 ־ פתרונות

גלעד אשרוב

13 במאי 2014

**הבהרה:** בכל שאלה שבה הנכם מתבקשים להוכיח חסמים, יש להוכיח על פי ההגדרה עם הקבועים ("קיים קבוע $c, n_0$ כך ש...") **ולא** לפי הגדרת הגבול.

**שאלה 1.** הסבירו מדוע אין כל משמעות למשפט "זמן הריצה של אלגוריתם $A$ הוא לכל היותר $\Omega(n^2)$".

**פתרון:** החסם $\Omega$ הוא חסם תחתון של אלגוריתם, ולכן יש להשתמש ב־"לכל הפחות" ולא ב־"לכל היותר". המשפט למעשה דומה למשפט הבא: "זמן הריצה של אלגוריתם $A$ הוא לכל היותר קטן שווה ל־ $c \cdot n^2$, עבור קבוע כלשהו $c > 0$ והחל מ־$n_0$ מסויים".

**שאלה 2.** הוכיחו שהחיתוך $o(g(n)) \cap \omega(g(n))$ הוא ריק. (אנו מצפים להוכחה פורמלית ולא לסתם הסבר אינטואיטיבי).

**פתרון:** נזכור שעבור $g(n)$ נתון, הסימונים $o(g(n))$ ו־ $\omega(g(n))$ למעשה מייצגים קבוצות. ניזכר בהגדרות:

$$o(g(n)) = \{\ f(n) \mid\ \forall k > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0\ :\ |f(n)| < k \cdot |g(n)|\ \},$$

$$\omega(g(n)) = \{\ f(n) \mid\ \forall k > 0,\ \exists n_0,\ \forall n > n_0\ :\ |f(n)| > k \cdot |g(n)|\ \},$$

נניח בשלילה שהחיתוך לא ריק, וקיימת פונקציה $f(n) \in o(g(n)) \cap \omega(g(n))$. נקבע איזשהו $k > 0$. מכיוון ש: $f(n) \in o(g(n))$, קיים איזשהו $n_0$ שעבורו לכל $n > n_0$, $|f(n)| < k \cdot |g(n)|$. בנוסף, מכיוון ש ־ $f(n) \in \omega(g(n))$, קיים איזשהו $n_1$ עבורו לכל $n > n_1$ מתקיים: $|f(n)| > k \cdot |g(n)|$. בפרט, לכל $n > \max\{n_0, n_1\}$ מתקיים:

$$k \cdot |g(n)| < |f(n)| < k \cdot |g(n)|\ ,$$

בסתירה.

**שאלה 3.** יהיו $f(n)$ ו ־ $g(n)$ שתי פונקציות חיוביות אסימפטוטיות. הוכיחו או הפריכו את כל אחת מן הטענות הבאות: (שימו לב בתשובתכם - חשבו גם על פונקציות "השואפות ל-0", כפי שהזכרנו בכיתה)

1. אם $f(n) \in O(g(n))$ אזי $g(n) \in O(f(n))$.
**פתרון:** לא נכון. נקח $f(n) = n$, $g(n) = n^2$. נקבל $n \in O(n^2)$, אבל ברור כי $n^2 \notin O(n)$.

2. $f(n)+g(n)\in\Theta(\min\{f(n),g(n)\})$.
**פתרון:** לא נכון. אותה דוגמא כמו קודם. $n^2+n\notin\Theta(n)$.

3. $\max\{f(n),g(n)\}\in\Theta(f(n)+g(n))$
**פתרון:** נכון. מכיון שהפונקציות חיוביות תמיד, לכל $n$ מתקיים: $\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n)$. מהצד השני, לכל $n$ מתקיים כי:

$$\max\{f(n),g(n)\}\geq f(n)\ ,$$

ובנוסף

$$\max\{f(n),g(n)\}\geq g(n)\ .$$

לפיכך (נחבר את שתי המשוואות):

$$2\max\{f(n),g(n)\}\geq f(n)+g(n)\ .$$

או: $\max\{f(n),g(n)\}\geq 1/2(f(n)+g(n))$. לסיכום, לכל $n$ מתקיים:

$$1/2\,(f(n)+g(n))\leq\max\{f(n),g(n)\}\leq f(n)+g(n)$$

ולכן $\max\{f(n),g(n)\}\in\Theta(f(n)+g(n))$.

4. $f(n)\in O(f(n)^2)$.
**פתרון:** לא נכון. נקח $f(n)=1/n$. אבל: $1/n\notin O(1/n^2)$.

5. $f(n)+o(f(n))\in\Theta(f(n))$.
**פתרון:** נכון. מתקיים: $o(f(n))\subseteq O(f(n))$ (ולמה?). לפיכך, תהי $g(n)\in o(f(n))$, כלומר $g(n)\in O(f(n))$ ולכן קיימים קבועים $c>0$, $n_0$ כל שלכל $n>n_0$ מתקיים $g(n)\leq c\cdot f(n)$, ולכן $f(n)+g(n)\leq f(n)+c\cdot f(n)=(c+1)f(n)$. מן הצד השני, ברור כי לכל $n$: $f(n)+g(n)\geq f(n)$. ובסה"כ נקבל כי לכל $n>n_0$ מתקיים:

$$f(n)\leq f(n)+g(n)\leq(c+1)f(n)\ .$$

6. אם $f(n)\in O(g(n))$ אזי $\log f(n)\in O(\log g(n))$.
**פתרון:** לא. נראה דוגמא נגדית: נקח $f(n)=1/2^n$ ו - $g(n)=1/n$. אזי $1/2^n\in O(1/n)$. מצד שני,

$$\log f(n)=\log 1/2^n=\log 1-\log 2^n=0-n\log 2=-n\ .$$

לעומת זאת,

$$\log g(n)=\log(1/n)=\log 1-\log n=-\log n\ .$$

מתקיים: $-n\notin O(-\log n)$.

7. $\binom{n}{3}\in\Theta(n^3)$.
**פתרון:**

$$\binom{n}{3}=\frac{n!}{(n-3)!3!}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

ברור כי $\binom{n}{3}\leq n^3$. מהצד השני,

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\geq\frac{(n/2)\cdot(n/2)\cdot(n/2)}{6}=\frac{n^3}{48}$$

ולכן לכל $n$:

$$\frac{1}{48}\cdot n^3 \leq \binom{n}{3} \leq n^3 \ .$$

8. $\sum_{i=1}^{n} a^i \in \Theta(a^{n+1})$.
**פתרון:** לא בהכרח. נניח $a=1$, נקבל: $\sum_{i=1}^{n} a^i = n$ ולעומת זאת $\Theta(a^{n+1})=\Theta(1)$.

9. $\sum_{i=1}^{n} i\cdot a^i \in \Theta(a^{n+1})$.
**פתרון:** לא בהכרח. נניח $a=1$, נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n} i\cdot a^i = \sum_{i=1}^{n} i\cdot 1 \in \Theta(n^2)$$

לעומת זאת, $\Theta(a^{n+1})=\Theta(1)$.

**שאלה 4.** חלקו את הרשימה הבאה למחלקות שקילות, כך ש - $f(n)$ ו - $g(n)$ שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f(n)=\Theta(g(n))$. נתחו את הסדר שבין מחלקות השקילות שהצגתם (אין צורך להוכיח):

$$n^{\log\log n} \quad n! \quad n^3 \quad \log(n!) \quad \ln n \quad (n+1)! \quad n \quad \sqrt[n]{n}$$
$$n\log n \quad 2^{2n} \quad 2^n \quad 4^{\log n} \quad 2^{\log n} \quad 2^{\log\log n} \quad n^2 \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

בחרו 5 זוגות של פונקציות מתוך הנ"ל, טענו והוכיחו את היחס האסימפטוטי שבינהם $(O,\Omega,\Theta,o,\omega)$ בצורה פורמלית.

**פתרון:** כל שורה היא מחלקת שקילות. השורות ממוינות מהקטן לגדול:

- $\sqrt[n]{n}$.
- $2^{\log\log n}(=\log n), \ln n$.
- $n, 2^{\log n}$.
- $n\log n, \log(n!)$
- $n^2 = 4^{\log n}$.
- $n^3$.
- $n^{\log\log n}$.
- $n^{\log n!}$.
- $(3/2)^n$.
- $2^n$
- $2^{2n}(=4^n)$.
- $n!$
- $(n+1)!$

**שאלה 5.** נתחו את סיבוכיות הקוד הבא:

```
i = 2;
while (i<n) {
    i = i*i;
    basic_step;
}
```

הצג חסם הדוק ($\Theta$).

**פתרון:** למעשה $i_k = i_{k-1}^2$. ולכן:

$$i_k = i_{k-1}^2 = i_{k-2}^4 = i_{k-3}^8 = .... = i_{k-(k-1)}^{2^{(k-1)}} = i_1^{2^{(k-1)}} = 2^{2^{k-1}} \ .$$

נקבל כי $k \approx \log\log n$ כדי שנצא מהלולאה.