מבני נתונים - תרגולים 6-7
גרפים - חיפוש BFS ו-DFS

גלעד אשרוב

8 באפריל 2014

תקציר

לשים לב! התרגול הפעם לא מכיל את החומר כלל, אלא רק תרגילים ופתרונות לתרגילים. את החומר ניתן למצוא בספר "מבוא לאלגוריתמים" הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

תרגיל 1. גרף דו־צדדי הוא גרף לא מכוון $G(V=V_0\cup V_1,E)$ כך ש: $V_0\cap V_0=\emptyset$, ומתקיים:

$$\forall(u,v)\in E\ :\ u\in V_i,\ v\in V_{1-i},\ i\in\{0,1\}$$

1. צביעה חוקית של צמתי הגרף $G(V,E)$ היא התאמה של צבע לכל צומת בגרף כך שאין שני צמתים שכנים (המחוברים בקשת) הצבועים באותו הצבע. גרף נקרא "k-צביע" אם קיימת עבורו צביעה חוקית המשתמשת ב-k צבעים. צ"ל: מהו ה-k המינימלי עבורו גרף דו"צ הוא k-צביע? (הוכיחו).
2. צ"ל: גרף הינו דו"צ אם ורק אם הוא לא מכיל מעגלים מאורך אי זוגי.
3. צ"ל: מצאו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V|+|E|)$ המקבל גרף וקובע האם הגרף הוא דו"צ. במידה וכן, על הגרף להחזיר את החלוקה ל-(V_0,V_1).

פתרון:

1. עבור גרף דו"צ מספיקים שני צבעים בלבד. נצבע את כל הקודקודים שב-V_0 בצבע 0, ואת כל הקודקודים של V_1 בצבע 1. מכיוון שאין שום קשת (u,v) כך ש: $u,v\in V_0$, וכמו כן אין קשת (u,v) עבורה $u,v\in V_1$, נקבל שהצביעה חוקית.
2. נתחיל עם הכיוון הראשון (נניח גרף דו"צ ונראה שאינו מכיל מעגלים מאורך אי-זוגי). נניח בשלילה שהגרף כן מכיל מעגל באורך אי-זוגי, נניח $u_0\to u_1\to\ldots,u_{2k}\to u_{2k+1}=u_0$ (שימו לב שמספר הקשתות הוא אי-זוגי), ונניח בלי הגבלת כלליות ש-$u_0\in V_0$. מכיוון שכל קשת שמתחילה ב-V_0 מסתיימת בקודקוד ב-V_1, ולהפך, נקבל כי - $u_1\in V_1,u_2\in V_0,\ldots,u_{2k}\in V_0$, ולכן $u_{2k+1}=u_0\in V_1$, בסתירה לכך ש-$u_0\in V_0$.

   כעת, נניח שהגרף לא מכיל מעגל מאורך אי-זוגי. ההוכחה תהיה אלגוריתמית - בסעיף הבא נראה אלגוריתם המקבל גרף, ובמידה ואין בו מעגל מאורך אי-זוגי, האלגוריתם יחזיר שתי קבוצות (V_0,V_1) שהם יהיו החלוקה של הקודקודים. הוכחה בסעיף הבא.
3. האלגוריתם יריץ BFS על קודקוד התחלה שרירותי s, ויחלק את הקודקודים לשכבות (לפי המרחקים מהקודקוד s). כעת, נרוץ על הקשתות ונוודא שאין קשת המחברת שני קודקודים מאותה השכבה. שימו

לב שאין קשתות המחברות קודקודים משכבה k לקודקודים משכבה $k+2$ (למה?). אם קיימת כזו קשת - נחזיר "הגרף אינו דו צדדי".

כעת, בשביל להראות שהאלגוריתם נכון - נראה כי האלגוריתם יודיע "הגרף אינו דו צדדי" אם ורק אם קיים מעגל בגרף מעגל באורך אי-זוגי.

לכיוון הראשון, האלגוריתם מחזיר "הגרף אינו דו צדדי" אם קיים קודקוד u וקודקוד v, שניהם מאותה השכבה, וקיימת קשת ביניהם. אם שניהם מאותה השכבה, אזי שניהם במרחק כלשהו d מ- s. אזי המסלול $s \rightsquigarrow u \to v \rightsquigarrow s$ הוא מעגל מאורך $2d+1$, וזהו מעגל מאורך אי זוגי.

הכיוון השני נשאר לקורא כתרגיל.

תרגיל 2. נתון גרף לא מכוון, קשיר וסופי $G=(V,E)$ ונתונה פונקציית משקל על הקשתות $\ell : E \to \{1,\dots,k\}$ (כאשר k קבוע). נתון צומת $s \in V$. אנו רוצים למצוא את המסלול הקל ביותר מ-s לכל צומת בגרף. הציעו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V|+k|E|)$ הפתור את הבעיה.

פתרון: נגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ בצורה הבאה: עבור כל קשת $(u,v)\in E$ שעבורה $\ell=\ell((u,v))>2$, נגדיר $\ell-1$ קודקודים חדשים: $u_1^{(u,v)},\dots,u_{\ell-1}^{(u,v)}$, ונגדיר את הקשתות $(u,u_1^{(u,v)}),(u_1^{(u,v)},u_2^{(u,v)}),\dots,(u_{\ell-1}^{(u,v)},v)$.
כעת, נריץ BFS על הגרף שהתקבל G', ונחזיר את כל המרחקים על קודקודים ששייכים לגרף המקורי ($V'\cap V$).
זמן ריצה: אנחנו עוברים על כל הקשתות בגרף G ומייצרים מהם גרף עם קודקודים ומסלולים נוספים. מתקיים: $|E'|\le k\cdot|E|$, ובנוסף: $|V'|\le|V|+k|E|$. עלות BFS: $O(|V'|+|E'|)=O(|V|+k|E|)$.

תרגיל 3. נתון גרף לא מכוון, סופי וקשיר $G=(V,E)$, וקודקד מקור s.
הציעו אלגוריתם שמוצא עבור כל קודקוד u בגרף את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל- u המכיל מספר זוגי של קשתות, או ∞ אם אין כזה.

הוכחה: נקח את הגרף G ונגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ בצורה הבאה: לכל קודקוד בגרף המקורי v ניצור זוג קודקודים בגרף החדש v_0,v_1. פורמלית, נקח: $V_0=\{v_0 \mid v\in V\}$ ובנוסף $V_1=\{v_1\mid v\in V\}$, ונקבע $V'=V_0\cup V_1$. בנוסף, לכל קשת $(u,v)\in E$ נייצר קשת (u_0,v_1) וקשת (u_1,v_0). פורמלית: $E'=\{(u_0,v_1),(u_1,v_0)\mid (u,v)\in E\}$. נריץ אלגוריתם BFS על (G',s_0), ונחזיר את כל המרחקים של הקודקודים של s לקודקודים ב-V_0.
הסבר לאלגוריתם (לא פורמלי). מסלולים אי זוגיים לא יתקבלו מכיוון שאלו מתחילים ב-s_0 ב-G', ומסתיימים בקודקוד שהוא בקבוצה V_1 (למה?). לעומת זאת, כל המסלולים שמתחילים ב-s_0 ומסתיימים באיזשהו קודקוד ב-V_0 יהיו מסלולים באורך זוגי. בנוסף, כל מסלול בגרף G' ניתן להמרה למסלול בגרף G. לפיכך, המסלולים הקצרים ביותר בגרף G' בין קודקוד s לבין קודקוד בקבוצה V_0, הוא מסלול זוגי קצר ביותר ב-G. ■

תרגיל 4. הוכיחו כי לגרף מכוון עם מעגל מכוון לא קיים מיון טופולוגי.

פתרון: יהי G גרף מכוון עם מעגל, נסמנו $v_1\to v_2\to\dots\to v_k\to v_1$. נניח שלגרף יש מיון טופולוגי. מכיוון ש- $(v_k,v_1)\in E$, בהכרח $v_k\prec v_1$. בנוסף, מכיוון שלכל $1\le i\le k-1$ מתקיים $(v_i,v_{i+1})\in E$, מתקיים $v_i\prec v_{i+1}$. מטרנזיטיביות נקבל כי: $v_1\prec v_2\prec\dots\prec v_k$ ולכן $v_1\prec v_k$, בסתירה.

שאלה. תנו דוגמה לגרף שהוא DAG, יחד עם ייצוג רשימת שכנויות כך שהרצת DFS עליו (לפי הסדר ברשימת השכנויות) וסידור הקודקודים על פי סדר עולה של d אינו נותן מיון טופולוגי. מהו המיון הטופולוגי שמתקבל משימוש באותה הרצה של DFS וסידור הקודקודים ע"פ סדר יורד של f?

פתרון: נתבונן בגרף $x \longrightarrow y$, כאשר ייצוג רשימת השכנויות הוא:

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \texttt{NULL} \\ x &\rightarrow y \end{aligned}$$

לפי ייצוג זה, הרצת ה-DFS תתחיל ב-y ולאחר מכן תעבור ל-x. ולכן:

$$d[y] = 1 \quad f[y] = 2 \quad d[x] = 3 \quad f[x] = 4$$

שאלה. נתון גרף $G = (V, E)$ מכוון וקודקוד התחלתי $s \in V$.

1. תארו אלגוריתם המוצא את כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מהקודקוד s (כלומר, כל הצמתים $u \in V$ כך שקיים מסלול מ-s ל-u).
2. תארו אלגוריתם המוצא את כל הצמתים שניתן להגיע מהם ל-S (כלומר, כל הצמתים $u \in V$ כך שקיים מסלול מ-u ל- s).

פתרון:

1. נפעיל פשוט BFS מהקודקוד s, ונחזיר את כל הקודקודים u שעבור $d[u] \neq \infty$, או לחילופין - כל הקודקודים הצבועים בצבע שחור.
2. נתבונן בגרף G' שבו בעצם הפכנו את כל הקשתות. כלומר, אם $G = (V, E)$, אזי $G' = (V, E')$, כאשר $E' = \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}$. כעת, נריץ BFS על G' ונחזיר את כל הקודקודים u שצבועים בשחור.

   נשים לב לתכונה הבאה: אם קיים מסלול מ-u לקודקוד s בגרף המקורי G, אזי בגרף החדש G' יהיה מסלול מ-s לקודקוד u (שכן, אם $u, v_1, \ldots, v_k, s$ מסלול ב-G, $s, v_k, \ldots, v_1, u$ מסלול ב-G'). בנוסף, אם אין מסלול מ-u ל- s בגרף G, לא יהיה קיים מסלול מ-s ל-u ב- G'. לכן האלגוריתם מחזיר את התשובה הנכונה.

   סיבוכיות האלגוריתם היא כמובן $O(|V| + |E|)$.

שאלה. נתון גרף לא מכוון $G = (V, E)$ וקודקוד $s \in V$. קשת (u, v) תקרא מיוחדת אם אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל- u שווה לאורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v. כלומר, $\delta(s, u) = \delta(s, v)$.
תארו אלגוריתם המוצא את כל הקשתות המיוחדת ב-G.

פתרון: נריץ BFS מהקודקוד s. נקבל חזרה את המערך d. נעבור על כל הקשתות $e = (u, v) \in E$. עבור כל קשת, אם מתקיים $d[u] = d[v]$, נסמן שהקשת e היא מיוחדת. עלות האלגוריתם היא הרצת BFS ($O(|V| + |E|)$) ובנוסף מעבר על כל הקשתות, ולכן בסה"כ $O(|V| + |E|)$.