מבני נתונים
תרגיל 5

גלעד אשרוב נתנאל גלרנטר

20 במאי 2014

תאריך הגשה: בתרגול הבא בקבוצת התרגול (תאריך אחרון: 29.05.14)

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**.
חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. נניח שלמונה הבינארי שהוגדר בתרגול הוספנו את פעולת ה$decrement$ (להחסיר ב-1). הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: העלות לשיעורין של פעולות כלשהו על המונה הבינארי הוא $O(1)$.

שאלה 2. בתרגול למדנו מערך דינאמי הגדל פי שניים בכל פעם, והתייחסנו לפעולת הכנסה בלבד. כעת, נתבונן במקרה בו ייתכנו פעולות הכנסה והוצאה (כאשר ההכנסה / הוצאה מתבצעת על האיבר האחרון במערך). נניח שכעת אנו במצב של מערך בגודל n. כאשר נגיע לתפוסה מלאה במערך (מספר האיברים במערך הוא n) - נקצה מערך בגודל $2n$ ונעתיק אליו את n האיברים. מן הצד השני, כאשר במערך רק $n/4$ איברים, נקצה מערך חדש בגודל $n/2$, ונעתיק את הערכים למערך החדש (עלות ־ $n/4$).

מצא חסם לעלות של רצף של m פעולות, לכל $m \geq 0$. (מומלץ לבצע ניתוח לפי שיטת "הבנק", אך אין הגבלה על השיטה).

שאלה 3. בהינתן סידרה של n מספרים $A = (a_1, \cdots, a_n)$, העץ הקרטזי של A מוגדר בצורה רקורסיבי בצורה הבאה. אם $n = 0$, אזי העץ הוא עץ ריק. אחרת, יהי i המיקום של האיבר המינימלי ב - A. כלומר, לכל $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, $a_j \geq a_i$. השורש של העץ הקרטזי של A הוא צומת r עם הערך a_i, הבן השמאלי של r הוא העץ הקרטזי עבור הסידרה $A_{\text{left}} = (a_1, \ldots, a_{i-1})$, והבן הימני של r הוא העץ הקרטזי $A_{\text{right}} = (a_{i+1}, \cdots, a_n)$.

1. צייר עץ קרטזי עבור הסידרה $A = (5, 100, 3, 1, 45, 19, 40, 45)$.
2. נניח ואנו רוצים להוסיף את האיבר 20 לסוף הסידרה הנ"ל. כיצד נראה העץ הקרטזי החדש?
3. מהו גובהו של העץ הקרטזי במקרה הגרוע ביותר?
4. הצג אלגוריתם המקבל כקלט עץ קרטזי עבור הסידרה $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ומספר k, ומחזיר עץ קרטזי עבור הסידרה $A' = (a_1, \ldots, a_n, k)$. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצגת?

   הנח: בייצוג העץ הקרטזי - לכל צומת קיים מצביע לבן הימני, לבן השמאלי ולאבא. בנוסף, אנחנו מחזיקים מלבד מצביע לשורש גם מצביע לאיבר האחרון a_n.

5. נניח את האלגוריתם הבא לבניית עץ קרטזי עבור הסידרה $A = (a_1, \ldots, a_n)$: מתחילים מעץ ריק המתאים לסידרה $A_0 = ()$. בכל שלב, אנחנו מפעילים את אלגוריתם ההכנסה ("השרשור") מהסעיף הקודם, ומוסיפים את האיבר הבא בסידרה. כלומר, בסיום השלב ה - i בנינו עץ קרטזי עבור הסידרה $A_i = (a_1, \ldots, a_i)$.

בשלב ה־$i+1$ נכניס את האיבר ה - a_{i+1} לעץ, ונקבל עץ קרטזי שמתאים לסידרה $A_{i+1} = (a_1, \ldots, a_{i+1})$.
בסיום השלב ה-n, אנחנו מסיימים עם עץ קרטזי עבור $A_n = A$.

הראה שהעלות לשיעורין לכל הכנסה הוא $O(1)$. במילים אחרות, הראה שבניית עץ קרטזי עבור הקבוצה A הוא במקרה הכי גרוע $O(n)$.

רמז: פתור בעזרת שיטת הפוטנציאל. הגדר את הפונקציה להיות אורך המסלול מהאיבר שהוכנס אחרון לשורש העץ.

שאלה 4. עליכם לבנות מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות:

- הכנסה (תעשה תמיד לאינדקס הראשון שפנוי במבנה).
- גישה לאיבר באינדקס-i (עלות נדרשת - $O(1)$).
- אין צורך לתמוך בהוצאה.

עליכם לבנות מבנה נתונים התומך בפעולות הנ"ל. המטרה ־ להביא למינימום את עלות ההכנסה, ולהביא למינימום את כמות הזיכרון שלא מנוצל.

1. הראו מבנה נתונים התומך בנ"ל כך שעבור כמות זיכרון לא מנוצל - k, עלות ההכנסה היא $O(n/k)$ לשיעורין.
2. הראו מבנה נתונים כך שעבור כמות זיכרון לא מנוצל $c \cdot k$ (עבור c קבוע כלשהו), עלות ההכנסה היא $O(n/k^c)$ לשיעורין.

שאלה 5.

1. נתונים שני עצי $B\text{–}tree$, A ו־B מסדר m. העץ A מכיל a איברים והעץ B מכיל b איברים. נניח $a > b$, ונניח שכל האיברים ב־A גדולים מכל האיברים ב־B. נסמן ב־h את גובהו של העץ A. תארו אלגוריתם הבונה $B\text{–}tree$ מאוחד, גם הוא מסדר m בזמן $O(h)$.
2. נתון עץ $B\text{–}tree$ מסדר m, ונתון איבר x. נסמן ב-h את גובהו של העץ. תארו אלגוריתם המפצל את העץ לשני עצי $B\text{–}tree$, A ו־B מסדר m כך שכל האיברים בעץ A קטנים שווים ל־x, וכל האיברים בעץ B גדולים מ־x. האלגוריתם צריך לעבוד בזמן $O(h)$.