מבני נתונים
תרגיל 4

גלעד אשרוב נתנאל גלרנטר

13 במאי 2014

תאריך הגשה: בתרגול הבאה, בקבוצת התרגול (תאריך אחרון: 23.05.14)

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**.
חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

תרגיל 0. (תרגיל זה הוא בשבילכם, ולא להגשה). הכנס את האיברים הבאים לעץ AVL:
$20, 12, 15, 17, 23, 53, 11, 10, 32, 45, 44, 22, 2, 9, 4$.
לאחר מכן, ביחרו שני איברים כלשהם והוציאו אותם מהעץ.

תרגיל 1. לסעיפים הבאים, כתבו אלגוריתמים הכי יעילים (אסימפטוטית) למשימה, והסבירו מדוע לא ניתן לבנות אלגוריתם יעיל יותר:

1. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט עץ בינארי, ומחזיר האם הוא עץ חיפוש.
2. כתבו אלגוריתם המקבל כקלט עץ בינארי, ומחזיר האם הוא עץ AVL.

תרגיל 2. נגדיר כגלגול את הפעולה שנעשית באיזון מחדש של עצי AVL. ראינו 4 סוגי גלגולים: פשוט וכפול, ימינה ושמאלה.

א. הוכח/י שבהינתן 2 עצי חיפוש בינאריים T_1 ו-T_2 בעלי אותם n ערכים ניתן להגיע מ-T_1 ל-T_2 ע"י ביצוע סדרה של גלגולים פשוטים.

רמז: הראה/י קודם איך לטפל בשורש ואח"כ בתת העצים.

ב. הראה/י שמספר הגלגולים הדרוש הוא $O(n^2)$.

תרגיל 3. נניח שבעץ AVL שומרים לכל צומת בנוסף לשדות הרגילים, את הדרגה של הצומת (מספר הקודקודים בתת העץ המושרש באותו הצומת). הראו כיצד ניתן לתחזק את השדות הנ"ל עם הכנסות והוצאות ב-AVL. כלומר, הראו כיצד ניתן לשנות את השדות הנ"ל עם כל הכנסה והוצאה.

תרגיל 4. תזכורת: האינטרוול $I = [x, y]$ (עבור $x \leq y$) היא קבוצת כל המספרים שבין x ל-y, כלומר -

$$\{z \mid x \leq z \leq y\} .$$

לערך x אנחנו קוראים $I.low$ ולערך y נקרא $I.high$.
נניח ואנו רוצים לבנות מבנה נתונים המאחסן אינטרוולים. בנוסף לפעולות הכנסה והוצאה, נרצה לתמוך בשאילתא הבאה:

חיפוש אינטרוול $[a,b]$: האם קיים במבנה אינטרוול $[x,y]$ שמכיל את $[a,b]$. כלומר, אינטרוול $[x,y]$ המקיים: $x \le a \le b \le y$. אם כן - החזר אותו.

בכדי לעשות זאת, נשמור את הנתונים בעץ AVL לפי מפתח - low. בנוסף, לכל קודקוד x בעץ, נשמור משתנה נוסף M שיישמור את המקסימום של ערכי ה-$high$ של כל תת העץ המושרש בקודקוד x, כלומר, המשתנה ישמור את:

$$x.\mathsf{M} = \max\{x.\mathsf{interval.high},\ x.\mathsf{left.M},\ x.\mathsf{right.M}\}\ .$$

הראו כיצד לממש את הפעולה "חיפוש אינטרוול $[a,b]$", וכיצד השדה M עוזר לנו בחיפוש זה.

תרגיל 5. עץ חיפוש בינארי ייקרא "עץ אדום שחור" אם הוא עץ שלם[1] ומקיים את התכונות הבאות:

1. כל צומת צבוע ב"אדום" או "שחור".
2. כל עלה צבוע ב"שחור".
3. אם צומת הוא אדום, אז שני בניו שחורים.
4. כל המסלולים מכל קודקוד לכל העלים שהם צאצאיו, מכילים את אותו המספר של צמתים שחורים.

ענה על הסעיפים הבאים:

א. מה ניתן להגיד על צבעם של הקדקדים במסלול מהשורש לעלה כלשהו ? (מהו יחס כמות הצמתים השחורים לעומת האדומים?)

הבהרה: עליכם לחשוב על מקרה כללי ולא להתמקד בהכרח בדוגמא שלפניכם.

ב. נגדיר את "הגובה השחור" כדלהלן:

הגדרה 1. (גובה שחור) לכל צומת x נגדיר "גובה השחור" ($black\ height$) של x, כמספר הקודקודים השחורים בכל מסלול מצומת x ועד לעלה (לא כולל את הצומת x עצמו). נסמן מספר זה ב - $bh(x)$.

בדוגמא שלפניכם, עבור הקודקוד 8, גובהו השחור הוא: $bh(8) = 2$. בצורה דומה, ציין לכל קודקוד את הגובה השחור שלו.

ג. נניח שבעץ h רמות, ויהי x השורש. הסבר מדוע: $bh(x) \ge h/2$.

ד. יהי x קודקוד פנימי, ויהיו y,z שני בניו. הוכח כי: $bh(x) \le bh(y)+1$ (ובאותו אופן גם: $bh(x) \le bh(z)+1$).

ה. הוכח את הטענה הבאה: לכל קודקוד x בעץ אדום שחור, תת העץ המושרש ב - x (כלומר, תת העץ ש-x הוא השורש שלו) מכיל לפחות $2^{bh(x)}-1$ צמתים פנימיים. (ההוכחה היא באינדוקציה על גובהו של x, והשתמשו בסעיף הקודם).

ו. השתמש בסעיפים ג' ו-ה' בכדי להראות שגובהו של עץ אדום שחור בעל n צמתים פנימיים הוא לכל היותר $2\log(n+1)$.

[1] **תזכורת:** עץ שלם הוא עץ שבו כל צומת הוא או עלה, או שיש לו שני בנים.

דוגמא לעץ אדום שחור: