מבני נתונים
פתרון תרגיל 6

גלעד אשרוב

12 במאי 2013

שאלה 1.

1. ציירו את הגרף (הלא מכוון) $G=(V,E)$ הבא:
   - $V=\{v_i \mid 1\le i\le 8\}$.
   - $E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_4),(v_2,v_5),(v_3,v_6),(v_3,v_7),(v_4,v_8),(v_5,v_8),(v_6,v_8),(v_7,v_8)\}$.
2. הציגו את הגרף בעזרת מטריצה.
3. הציגו את הגרף בעזרת רשימת שכנויות.
4. הריצו BFS על הגרף (התחילו מ-v_1). ציינו את d,π וציירו את עץ ה-BFS המתקבל. סדר ההרצה ייתבצע על פי רשימת השכנויות שציינתם בסעיף הקודם.
5. הריצו את DFS על הגרף. ציירו את יער ה-DFS, וסווגו את הקשתות בגרף. סדר ההרצה ייתבצע על פי רשימת השכנויות שציינתם בסעיף הקודם.

שאלה 2. נתון גרף $G=(V,E)$ מכוון וקודקוד התחלתי $s\in V$.

1. תארו אלגוריתם המוצא את כל הצמתים שניתן להגיע אליהם מהקודקוד s (כלומר, כל הצמתים $u\in V$ כך שקיים מסלול מ-s ל-u).
2. תארו אלגוריתם המוצא את כל הצמתים שניתן להגיע מהם ל-S (כלומר, כל הצמתים $u\in V$ כך שקיים מסלול מ-u ל- s).

פתרון:

1. נפעיל פשוט BFS מהקודקוד s, ונחזיר את כל הקודקודים u שעבור $d[u]\neq\infty$, או לחילופין - כל הקודקודים הצבועים בצבע שחור.
2. נתבונן בגרף G' שבו בעצם הפכנו את כל הקשתות. כלומר, אם $G=(V,E)$, אזי $G'=(V,E')$, כאשר $E'=\{(v,u)\mid(u,v)\in E\}$. כעת, נריץ BFS על G' ונחזיר את כל הקודקודים u שצבועים בשחור.

   נשים לב לתכונה הבאה: אם קיים מסלול מ-u לקודקוד s בגרף המקורי G, אזי בגרף החדש G' יהיה מסלול מ-s לקודקוד u (שכן, אם $u,v_1,\dots,v_k,s$ מסלול ב-G, $s,v_k,\dots,v_1,u$ מסלול ב-G'). בנוסף, אם אין מסלול מ-u ל- s בגרף G, לא יהיה קיים מסלול מ-s ל-u ב- G'. לכן האלגוריתם מחזיר את התשובה הנכונה.

   סיבוכיות האלגוריתם היא כמובן $O(|V|+|E|)$.

שאלה 3. נתון גרף לא מכוון $G=(V,E)$ וקודקוד $s\in V$. קשת (u,v) תקרא מיוחדת אם אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל- u שווה לאורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל-v. כלומר, $\delta(s,u)=\delta(s,v)$.
תארו אלגוריתם המוצא את כל הקשתות המיוחדת ב-G.

פתרון: נריץ BFS מהקודקוד s. נקבל חזרה את המערך d. נעבור על כל הקשתות $e=(u,v)\in E$. עבור כל קשת, אם מתקיים $d[u]=d[v]$, נסמן שהקשת e היא מיוחדת. עלות האלגוריתם היא הרצת BFS ($O(|V|+|E|)$) ובנוסף מעבר על כל הקשתות, ולכן בסה"כ $O(|V|+|E|)$.

שאלה 4. יהי $G=(V,E)$ גרף מכוון שבו לכל קודקוד יש פונקציית β. נגדיר את הפונקציה:

$$\alpha(u)=\max\{\beta(v)\mid \text{there is a path from } u \text{ to } v \text{ in } G\}$$

הראו כיצד ניתן לחשב $\alpha(u)$ לכל קודקוד u בגרף חסר מעגלים. נתח את סיבוכיות האלגוריתם (הניקוד יינתן ככל שהאלגוריתם יעיל יותר).

פתרון: נשים לב שמכיוון ואין מעגלים בגרף, מתקיים כי:

$$\alpha(u)=\max_{(u,v)\in E}\{\alpha(v),\beta(v)\}$$

נגדיר את הפונקציה להחזיר $-\infty$ אם אין קשתות שיוצאות מ-u. מכיוון שאין מעגלים בגרף, הפונקציה מוגדרת היטב.
כעת, בהינתן הגרף G נרוץ בצורה הבאה, מבוסס על DFS: נשנה את DFS-visit כך שיחשב בנוסף את פונקציית ה-α לכל קודקוד. בהתחלה, הערך מאותחל ל-$-\infty$. כאשר עוברים על רשימת השכנים של קודקוד u ב-DFS-visit ובוחנים שכן v, בודקים האם הוא לבן או שחור (לא ייתכן צבע אפור - צבע אפור סוגר מעגל). אם הצבע הוא לבן - נכנסים רקורסיבית אל v ומבצעים DFS-visit. לאחר מכן, אם הוא שחור, או שחזרנו מהרקורסיה - הערך $\alpha(v)$ חושב, ונעדכן: $\alpha(u)=\max\{\alpha(u),\beta(v),\alpha(v)\}$. כאשר סיימנו לעבור על כל השכנים של u, נקבל שהערך $\alpha(u)$ הוא בעצם מה שרצינו, ולכן נסיים.