מבני נתונים - תרגיל 2
נוסחאות נסיגה - פתרון

גלעד אשרוב

17 במרץ 2013

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**. חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

תאריך הגשה אחרון: עד ליום ראשון הבא - תאריך 17.03

תרגיל 1. פתרו את התרגיל הבא **שלוש** פעמים, בכל פעם עם שיטה אחרת שראינו בכיתה (כלומר, בשיטת האיטרציה, האינדוקציה ועצי הרקורסיה). מצאו חסם הדוק לנוסחא הבאה:

$$T(n) = \begin{cases} 3T(n/3) + n & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

פתרון: בפתרון זה נסתפק רק בעזרת אחת מהשיטות. נפתור לפי אינדוקציה. "ננחש" שהפתרון הוא $\Theta(n \log n)$. כעת נוכיח חסם עליון וחסם תחתון:

טענה 1. $T(n) \in \Omega(n \log n)$. כלומר, קיימים קבועים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) > c \cdot n \log n$$

הוכחה: נתחיל מהצעד. נניח שהטענה מתקיימת עבור $n/3$. כלומר, נניח כי:

$$T\left(\frac{n}{3}\right) > c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3}$$

כעת:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3T(n/3) + n > 3 \cdot c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} + n = c \cdot n \log \frac{n}{3} + n = c \cdot n \log n - c \cdot n \log 3 + n \\ &\geq c \cdot n \log n - 2 \cdot c \cdot n + n \end{aligned}$$

אנחנו רוצים ש $T(n) > cn \log n$. הנ"ל מתקיים אם:

$$\begin{aligned} -2 \cdot c \cdot n + n &\geq 0 \\ -2 \cdot c \cdot n &\geq -n \\ c &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ולכן נקבע: $c = 1/2$.

בסיס: נבדוק החל מאיזה n מתקיים:

$$T(n) > \frac{1}{2} n \log n$$

עבור $n = 3$ מתקיים:

$$T(3) = 3T(1) + 3 = 6$$

מהצד השני:

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \log 3 \approx 2.377$$

ולכן $n_0 = 3$. ■

נוכיח חסם תחתון:

טענה 2. $T(n) \in O(n \log n)$. כלומר, קיימים קבועים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) < c \cdot n \log n$$

הוכחה: נניח שמתקיים:

$$T(n/3) < c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3}$$

נראה את הצעד:

$$\begin{aligned} T(n) &= 3 \cdot T(n/3) + n < 3 \cdot \left(c \cdot \frac{n}{3} \log \frac{n}{3} \right) + n = c \cdot n \log \frac{n}{3} + n = cn \log n - cn \log 3 + n \\ &\leq cn \log n - cn + n \end{aligned}$$

נבדוק מתי הנ"ל קטן מ- $c \cdot n \log n$. מתקיים:

$$\begin{aligned} cn \log n - cn + n &\leq c \cdot n \log n \\ -cn &\leq -n \\ c &\geq 1 \end{aligned}$$

ולכן נקח $c = 2$, למשל.

בסיס: עבור $n = 3$ מתקיים: $T(3) = 3T(1) + 3 = 6$. מהצד השני: $6 \log 3 > 6$ ומתקיים:

$$T(3) = 3T(1) + 3 = 6 < 2 \cdot 3 \cdot \log 3$$

■

תרגיל 2. הציגו חסם הדוק אסימפטוטית לנוסחא הבאה: $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log \log n)$.

הדרכה: הגדירו $m = \log \log n$

פתרון. נשתמש בהחלפת משתנים. נגדיר: $m = \log\log n$. לכן, $n = 2^{2^m}$, $\sqrt{n} = 2^{2^{m-1}}$, נקבל:

$$T(2^{2^m}) = T(2^{2^{m-1}}) + \Theta(m)$$

נבצע החלפת משתנים: $S(m) \stackrel{\text{def}}{=} T(2^{2^m})$:

$$S(m) = S(m-1) + \Theta(m)$$

קל לראות שהנוסחא הנ"ל הולכת ל - $\Theta(m^2)$, ולכן:

$$\begin{aligned} S(m) &\in \Theta(m^2) \\ T(2^{2^m}) &\in \Theta(m^2) \\ T(2^{2^{\log\log n}}) &\in \Theta\left((\log\log n)^2\right) \\ T(n) &\in \Theta\left((\log\log n)^2\right) \end{aligned}$$

תרגיל 3. הציגו חסם הדוק אסימפטוטית לנוסחא הבאה: $T(n) = T(n/2 + \sqrt[3]{n^2}) + 10$

פתרון. קל לראות כי $n/2 > \sqrt[3]{n^2}$ כמעט לכל n, ולכן, נסתכל על הנוסחא כאילו היא: $S(n) = S(n/2) + 10$. ראינו בכיתה שנוסחא כזו הולכת ל - $\Theta(\log n)$. כעת נוכיח שנוסחא המקורית היא אכן כזו.

טענה 3. קיימים שני קבועים, $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) \le c \cdot \log n$$

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה על n. נתחיל עם הצעד, נניח שעבור $n/2 + \sqrt[3]{n^2}$ מתקיים:

$$T(n/2 + \sqrt[3]{n^2}) \le c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt[3]{n^2}\right)$$

ולכן:

$$T(n) \quad = \quad T(n/2 + \sqrt[3]{n^2}) + 10 \le c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt[3]{n^2}\right) + 10$$

החל מ- $n_0 = 16$ (לפחות..), נקבל כי: $\sqrt[3]{n^2} \le n/4$, ולכן נקבל:

$$T(n) \le c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt[3]{n^2}\right) + 10 \le c \cdot \log(3n/4) + 10$$

אנו שואלים עבור איזה c הנ"ל קטן מ - $c \log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c \cdot \log(3n/4) + 10 &\le c \log n \\ 10 &\le c \cdot (\log n - \log(3n/4)) = c \cdot (\log 4/3) \\ \frac{10}{\log(4/3)} &\le c \end{aligned}$$

ונקבל כי עבור c כנ"ל, ועבור $n \ge 16$, צעד האינדוקציה מתקיים.
בסיס: השלם לבד. ■

מהנ"ל אנו מסיקים כי $T(n) \in O(\log n)$. כעת נראה חסם תחתון.

טענה 4. $T(n) \in \Omega(n \log n)$. כלומר, קיימים קבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$T(n) \geq c \cdot \log n$$

הוכחה: צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n/2 + \sqrt[3]{n^2}$ שמתקיים:

$$T(n/2 + \sqrt[3]{n^2}) \geq c \cdot \log \left(n/2 + \sqrt[3]{n^2}\right)$$

נקבל:

$$T(n) = T(n/2 + \sqrt[3]{n^2}) + 10 \geq c \cdot \log \left(n/2 + \sqrt[3]{n^2}\right) + 10 \geq c \cdot \log (n/2) + 10$$

אנו שואלים מתי הנ"ל גדול מ - $c \cdot \log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c \cdot \log (n/2) + 10 &\geq c \cdot \log n \\ 10 &\geq c \cdot \log 2 \\ 10 &\geq c \end{aligned}$$

וקיבלנו שצעד האינדוקציה נכון לכל c קטן מספיק.

בסיס - השלם לבד. ■

תרגיל 4. נתונה הנוסחא הבאה (כאשר a, b, c קבועים):

$$T(n) = \begin{cases} aT(n/b) + n^c & \text{if } n > 1 \\ 1 & \text{if } n = 1 \end{cases}$$

אזי, לכל n (כאשר ניתן להניח ש-n היא חזקה שלמה של b), הוכח כי:

1. אם $\log_b a < c$, אזי $T(n) = \Theta(n^c)$.
2. אם $\log_b a = c$, אזי $T(n) = \Theta(n^c \log n)$.
3. אם $\log_b a > c$, אזי $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.

הדרכה: פתרו את הנוסחא באופן כללי, עד שתגיעו לביטוי מהצורה: $T(n) = A \cdot T(1) + B$. כעת פתרו לפי המקרים. במקרים 3,1, העזרו בשיוויון: $x^{\log_y z} = z^{\log_y x}$ (והוכיחו את שיוויון זה)

פתרון: נציב את הנוסחא בעצמה פעם אחת. נקבל:

$$T(n) = aT(n/b) + n^c = a(aT(n/b^2) + (n/b)^c) + n^c = a^2T(n/b^2) + n^c + a(n/b)^c$$

אם נמשיך להציב את הנוסחא i פעמים, נקבל:

$$T(n) = a^i \cdot T\left(\frac{n}{b^i}\right) + \sum_{k=0}^{i-1} \frac{n^c \cdot a^k}{b^{c \cdot k}} = a^i \cdot T\left(\frac{n}{b^i}\right) + n^c \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

כעת, נבדוק מתי נגיע לתנאי העצירה:

$$\begin{aligned} \frac{n}{b^i} &= 1 \\ i &= \log_b n \end{aligned}$$

ונקבל נוסחא כללית:

$$T(n)=a^{\log_b n}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

נשים לב כי לכל x,y,z חיוביים, מתקיים $x^{\log_y z}=z^{\log_y x}$, ולכן:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k$$

בנוסף, נתבונן בביטוי שבתוך הסכום: $\frac{a}{b^c}$. ביטוי זה שווה 1 כאשר $c=\log_b a$. כעת, נחלק למקרים:

1. אם $\log_b a<c$, אזי $b^c>b^{\log_b a}=a$, ונקבל אם כן כי $\frac{a}{b^c}$ הוא איזשהו קבוע r שקטן ממש מ-1. לפיכך, מתקיים כי:

$$r\leq\sum_{k=0}^{\log_b n-1}r^k\leq\sum_{k=0}^{\infty}r^k\leq\frac{1}{1-r}$$

ונקבל בסה"כ:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k\leq n^c+n^c\cdot\frac{1}{1-r}=\left(1+\frac{1}{1-r}\right)\cdot n^c$$

ומהצד השני:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k\geq 0+r\cdot n^c=r\cdot n^c$$

ולכן, בסה"כ $T(n)\in\Theta(n^c)$.

2. במקרה ו- $\log_b a=c$, נקבל כי: $\frac{a}{b^c}=1$, ולכן:

$$T(n)=n^{\log_b a}+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)^k=n^c+n^c\cdot\sum_{k=0}^{\log_b n-1}1=n^c+n^c\cdot\log_b n$$

ולכן $T(n)\in\Theta(n^c\log_b n)$.

3. במקרה ו- $\log_b a>c$ נקבל כי $\frac{a}{b^c}$ הוא איזשהו קבוע גדול מ-1, ולפי סכום סדרה הנדסית:

$$\sum_{k=0}^{\log_b n-1}\left(\frac{a}{b^c}\right)=\frac{\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n-1}-1}{\frac{a}{b^c}-1}\in\Theta\left(\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\right)$$

ולכן הנוסחא כולה היא ב- $T(n)\in\Theta(n^{\log_b a}+n^c\cdot\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n})$. אבל, נשים לב כי:

$$n^c\cdot\left(\frac{a}{b^c}\right)^{\log_b n}\quad=\quad n^c\cdot\frac{a^{\log_b n}}{(b^c)^{\log_b n}}=n^c\cdot\frac{n^{\log_b a}}{n^{\log_b b^c}}=n^c\cdot\frac{n^{\log_b a}}{n^c}=n^{\log_b a}$$

ולכן הנוסחא כולה היא ב: $T(n)\in\Theta(n^{\log_b a})$.