מבני נתונים 89-120
תרגיל 1 - פתרון

גלעד אשרוב

10 במרץ 2013

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**. חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. הוכיחו את הטענה שציינו בכיתה: יהיו $f(n), g(n)$ שתי פונקציות חיוביות. אזי, $f(n) \in O(g(n))$ וגם $f(n) \in \Omega(g(n))$ אם ורק אם $f(n) \in \Theta(g(n))$.

יש להוכיח את הטענה הנ"ל **פעמיים** - ע"י כל אחת מההגדרות השקולות שראינו בכיתה.

הוכחה: נראה הוכחה לפי הגדרה 1 (הגדרה 2 דורשת הנחה נוספת - שהפונקציות דיפרינציאבליות ושקיים גבול. נוותר על כיוון זה).

כיוון ראשון - נניח ש- $f(n) \in O(g(n))$ וגם $f(n) \in \Omega(g(n))$. נראה ש- $f(n) \in \Theta(g(n))$. מכיוון ש- $f(n) \in O(g(n))$ קיימים קבועים c_0, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $f(n) < c_0 \cdot g(n)$. בנוסף, מכיוון ש- $f(n) \in \Omega(g(n))$ קיימים קבועים c_1, n_1 כך שלכל $n > n_1$ מתקיים: $f(n) > c_1 \cdot g(n)$. בסה"כ, לכל $n > \max n_0, n_1$ מתקיים:

$$c_1 g(n) < f(n) < c_0 g(n)$$

ולכן $f(n) \in \Theta(g(n))$.

בשביל הכיוון השני, נניח ש- $f(n) \in \Theta(g(n))$. אזי קיימים קבועים c_1, c_2, n_0 כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$c_1 g(n) < f(n) < c_2 g(n)$$

ולכן מתקיים ש - $f(n) \in O(g(n))$ (עם הקבועים c_2, n_0), ומתקיים גם $f(n) \in \Omega(g(n))$ (עם הקבועים c_1, n_0).

■

שאלה 2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם הטענה **נכונה** או **לא נכונה**. יש להוכיח את התשובה (ע"י הוכחה במקרה הראשון, או הפרכה במקרה השני). הנח ש- $f(n), g(n)$ פונקציות לא שליליות.

א. $f(n) \in \Omega(f(n)^2)$.

פתרון: הטענה אינה נכונה. נראה דוגמא נגדית: נקח $f(n) = n$. אזי הטענה אומרת כי $n \in \Omega(n^2)$, וברור שהנ"ל לא נכון (אפילו ראינו בכיתה).

ב. $f(n) + g(n) \in \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$.

פתרון: הטענה אינה נכונה. נקח $f(n) = n$, $g(n) = n^2$. אזי $f(n) + g(n) = n + n^2$. לעומת זאת: $\min\{n, n^2\} = n$. הטענה אומרת ש- $n + n^2 \in \Theta(n)$, מה שכומבן אינו נכון.

ג. $f(n) + \Omega(f(n)) \in \Theta(f(n))$.

פתרון: נקח $f(n) = n$, ואת הפונקציה $h(n) \in \Omega(f(n))$ נקח כ- n^2. הטענה אומרת $n + n^2 \in \Theta(n)$, מה שכמובן אינו נכון.

ד. נתון $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i \log i$. אזי: $f(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

פתרון: הטענה נכונה. נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{n} i \log i \leq \sum_{i=1}^{n} n \log n = n^2 \log n$$

מהצד השני:

$$\sum_{i=1}^{n} i \log i \geq \sum_{i=n/2}^{n} i \log i \geq \sum_{i=n/2}^{n} n/2 \log n/2 = (n/2)^2 \log n/2$$

ולכן הוכחנו גם חסם תחתון וגם חסם עליון.

ה. אם $f(n) \in \Theta(g(n))$ וגם $g(n) \in \Theta(h(n))$ אזי $f(n) \in \Theta(h(n))$.

הטענה נכונה. היחס Θ הוא טרנזטיבי.

ו. $n/100 \in \Omega(n)$.

הטענה נכונה. נקח $c = 1/200$, $n_0 = 1$ ומתקיים לכל $n > n_0$:

$$n/100 = f(n) > c \cdot n = n/200.$$

ז. אם $f(n) \in O(g(n))$ וגם $g(n) \in O(f(n))$ אזי $f(n) = g(n)$.

פתרון: הטענה אינה נכונה. נקח $f(n) = n$ ו- $g(n) = 2n$. אזי $n \in O(2n)$ וגם $2n \in O(n)$. אבל $2n \neq n$.

שאלה 3. נניח שיש לנו מחשב המסוגל לבצע מיליארד הוראות בשנייה (1GHz). נתונים שלושה אלגוריתמים, אחד דורש N^2 הוראות, השני N^5 והשלישי 2^N. כמה זמן יקח (בקירוב) לאלגוריתמים לרוץ על המחשב הנ"ל עבור קלטים מגודל: $10, 20, 50, 100, 1000$? (במילים אחרות, השלימו את הטבלה הבאה):

	input size				
	10	20	50	100	1000
N^2	0.1 μs	0.4 μs	2.5 μs	0.01ms = 10 μs	1ms
N^5	0.1 ms	3.2 ms	0.3125 s	10s	10^6s $\approx$ 11.57Days
2^N	1.024μs	1.04 ms	$\approx$12 Days	$4.019 * 10^13$ years	$3.39 * 10^284$ years

כאשר μs הוא "מיקרו שניה" (10^{-6} שנייה), ו- ms הוא "מילי שנייה" - (10^{-3} שנייה).

שאלה 4. חלקו את הרשימה הבאה למחלקות שקילות, כך ש- $f(n)$ ו - $g(n)$ שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f(n) \in \Theta(g(n))$. נתחו את הסדר שבין מחלקות השקילות שהצגתם, ומיינו אותם לפי סדר (אין צורך להוכיח כל מעבר):

$$n^{\log\log n} \quad an^2+b \quad 2^n \quad n^n \quad n^3 \quad an^3+d \quad \log_5 n \quad 2^{\log n} \quad 4^{\log n}$$
$$\log^5 n \quad \log(n!) \quad n\ln n \quad \log 2^n \quad \log^n 2 \quad 5n^2+6 \quad n^{\log(n!)}$$

כאשר a,b,d קבועים כלשהם (חיוביים). לאחר מיון הפונקציות הנ"ל למחלקות שקילות, בחרו עשרה זוגות של פונקציות מהנ"ל **והוכיחו** את הקשר בינהם (O,Ω,Θ,o,ω). עליכם ליצור טענה אחת לפחות מכל סוג (כלומר, לפחות טענה אחת של $f(n) \in O(g(n))$, אחת מסוג $f(n) \in \Omega(g(n))$ וכן הלאה).

בנוסף, בכל פעם שכתוב $\log$ - הכוונה היא ללוג על בסיס 2, אלא אם כן צויין במפורש אחרת.

פתרון:

1. $\log_5 n$.
2. $\log^5 n$.
3. $2^{\log n} = n$, $\log 2^n = n\log 2 = n$.
4. $n\ln n, \log(n!)$.
5. an^2+b, $5n^2+6$, $4^{\log n} = 2^{2\log n} = 2^{\log n^2} = n^2$.
6. n^3, an^3+d.
7. $n^{\log\log n}$.
8. 2^n.
9. n^n.
10. $n^{\log n!}$.