מבני נתונים - תרגולים 6-7
גרפים - חיפוש BFS ו-DFS

גלעד אשרוב

24 באפריל 2013

תקציר

לשים לב! התרגול הפעם לא מכיל את החומר כלל, אלא רק תרגילים ופתרונות לתרגילים. את החומר ניתן למצוא בספר "מבוא לאלגוריתמים" הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

תרגיל 1. גרף דו־צדדי הוא גרף לא מכוון $G(V = V_0 \cup V_1, E)$ כך ש: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, ומתקיים:

$$\forall (u,v) \in E \ : \ u \in V_i, \ v \in V_{1-i}, \ i \in \{0,1\}$$

1. צביעה חוקית של צמתי הגרף $G(V,E)$ היא התאמה של צבע לכל צומת בגרף כך שאין שני צמתים שכנים (המחוברים בקשת) הצבועים באותו הצבע. גרף נקרא "k-צביע" אם קיימת עבורו צביעה חוקית המשתמשת ב-k צבעים. צ"ל: מהו ה-k המינימלי עבורו גרף דו"צ הוא k-צביע? (הוכיחו).
2. צ"ל: גרף הינו דו"צ אם ורק אם הוא לא מכיל מעגלים מאורך אי זוגי.
3. צ"ל: מצאו אלגוריתם הרץ בזמן $O(|V|+|E|)$ המקבל גרף וקובע האם הגרף הוא דו"צ. במידה וכן, על הגרף להחזיר את החלוקה ל-(V_0, V_1).

פתרון:

1. עבור גרף דו"צ מספיקים שני צבעים בלבד. נצבע את כל הקודקודים שב-V_0 בצבע 0, ואת כל הקודקודים של V_1 בצבע 1. מכיוון שאין שום קשת (u,v) כך ש: $u,v \in V_0$, וכמו כן אין קשת (u,v) עבורה $u,v \in V_1$, נקבל שהצביעה חוקית.
2. נתחיל עם הכיוון הראשון (נניח גרף דו"צ ונראה שאינו מכיל מעגלים מאורך אי-זוגי). נניח בשלילה שהגרף כן מכיל מעגל באורך אי-זוגי, נניח $u_0 \to u_1 \to \ldots, u_{2k} \to u_{2k+1} = u_0$ (שימו לב שמספר הקשתות הוא אי-זוגי), ונניח בלי הגבלת כלליות ש-$u_0 \in V_0$. מכיוון שכל קשת שמתחילה ב-V_0 מסתיימת בקודקוד ב-V_1, ולהפך, נקבל כי - $u_1 \in V_1, u_2 \in V_0, \ldots, u_{2k} \in V_0$, ולכן $u_{2k+1} = u_0 \in V_1$, בסתירה לכך ש-$u_0 \in V_0$.

   כעת, נניח שהגרף לא מכיל מעגל מאורך אי-זוגי. ההכוחה תהיה אלגוריתמית - בסעיף הבא נראה אלגוריתם המקבל גרף, ובמידה ואין בו מעגל מאורך אי-זוגי, האלגוריתם יחזיר שתי קבוצות (V_0, V_1) שהם יהיו החלוקה של הקודקודים. הוכחה בסעיף הבא.
3. האלגוריתם יריץ וריאציה על BFS. נתחיל בצומת שרירותי s. כל צומת במרחק זוגי מ-s נכניס ל- V_0, וכל צומת במרחק אי-זוגי מ-s נכניס ל-V_1. במידה וניסינו להכניס קודקוד שכבר מצאנו לקבוצה השנייה - קיבלנו מעגל אי זוגי. נעצור ונחזיר "הגרף אינו דו צדדי".

כעת, בשביל להראות שהאלגוריתם נכון - נראה כי האלגוריתם יודיע "הגרף אינו דו צדדי" אם ורק אם קיים מעגל בגרף מעגל באורך אי-זוגי.

לכיוון הראשון, האלגוריתם מחזיר "הגרף אינו דו צדדי" אם קיים קודקוד u שכבר הוכנס לאחת הקבוצות ורוצים להכניס אותו גם לקבוצה השנייה. מכיוון שהוכנס לקבוצה V_0 - קיים מסלול זוגי בין s ל-u. בנוסף, מכיוון שהוכנס לקבוצה V_1, קיים מסלול אי זוגי בין s לבין u. אם נשרשר את שני המסלולים, נקבל מסלול המתחיל ב-s וחוזר אליו תוך מספר אי-זוגי של קשתות, ולכן קיים מעגל אי-זוגי.

בנוסף, קל לראות שברגע שיש מעגיל אי זוגי - נמצא אותו באלגוריתם.

תרגיל 2. נתון גרף לא מכוון, קשיר וסופי $G=(V,E)$ ונתונה פונקציית משקל על הקשתות $\ell : E \to \{1,\ldots,k\}$ (כאשר k קבוע). נתון צומת $s \in V$. אנו רוצים למצוא את המסלול הקל ביותר מ-s לכל צומת בגרף. הציעו אלגוריתם שרץ בזמן $O(|V|+k|E|)$ הפתור את הבעיה.

פתרון: נגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ בצורה הבאה: עבור כל קשת $(u,v)\in E$ שעבורה $\ell=\ell((u,v))>2$, נגדיר $\ell-1$ קודקודים חדשים: $u_1^{(u,v)},\ldots,u_{\ell-1}^{(u,v)}$, ונגדיר את הקשתות $(u,u_1^{(u,v)}),(u_1^{(u,v)},u_2^{(u,v)}),\ldots,(u_{\ell-1}^{(u,v)},v)$.

כעת, נריץ BFS על הגרף שהתקבל G', ונחזיר את כל המרחקים על קודקודים ששייכים לגרף המקורי ($V'\cap V$).

זמן ריצה: אנחנו עוברים על כל הקשתות בגרף G ומייצרים מהם גרף עם קודקודים ומסלולים נוספים. מתקיים: $|E'|\le k\cdot|E|$, ובנוסף: $|V'|\le|V|+k|E|$. עלות BFS: $O(|V'|+|E'|)=O(|V|+k|E|)$.

תרגיל 3. נתון גרף לא מכוון, סופי וקשיר $G=(V,E)$, וקודקד מקור s.

הציעו אלגוריתם שמוצא עבור כל קודקוד u בגרף את אורך המסלול הקצר ביותר מ-s ל- u המכיל מספר זוגי של קשתות, או ∞ אם אין כזה.

הוכחה: נקח את הגרף G ונגדיר גרף חדש $G'=(V',E')$ בצורה הבאה: לכל קודקוד בגרף המקורי v ניצור זוג קודקודים בגרף החדש v_0,v_1. פורמלית, נקח: $V_0=\{v_0\mid v\in V\}$ ובנוסף $V_1=\{v_1\mid v\in V\}$, ונקבע $V'=V_0\cup V_1$. בנוסף, לכל קשת $(u,v)\in E$ נייצר קשת (u_0,v_1) וקשת (u_1,v_0). פורמלית: $E'=\{(u_0,v_1),(u_1,v_0)\mid (u,v)\in E\}$. נריץ אלגוריתם BFS על (G',s_0), ונחזיר את כל המרחקים של הקודקודים של s לקודקודים ב-V_0.

הסבר לאלגוריתם (לא פורמלי). מסלולים אי זוגיים לא יתקבלו מכיוון שאלו מתחילים ב-s_0 ב-G', ומסתיימים בקודקוד שהוא בקבוצה V_1 (למה?). לעומת זאת, כל המסלולים שמתחילים ב-s_0 ומסתיימים באיזשהו קודקוד ב-V_0 יהיו מסלולים באורך זוגי. בנוסף, כל מסלול בגרף G' ניתן להמרה למסלול בגרף G. לפיכך, המסלולים הקצרים ביותר בגרף G' בין קודקוד s לבין קודקוד בקבוצה V_0, הוא מסלול זוגי קצר ביותר ב-G. ■

תרגיל 4. הוכיחו כי לגרף מכוון עם מעגל מכוון לא קיים מיון טופולוגי.

פתרון: יהי G גרף מכוון עם מעגל, נסמנו $v_1\to v_2\to\ldots\to v_k\to v_1$. נניח שלגרף יש מיון טופולוגי. מכיוון ש- $(v_k,v_1)\in E$, בהכרח $v_k\prec v_1$. בנוסף, מכיוון שלכל $1\le i\le k-1$ מתקיים $(v_i,v_{i+1})\in E$, מתקיים $v_i\prec v_{i+1}$. מטרנזיטיביות נקבל כי: $v_1\prec v_2\prec\ldots\prec v_k$ ולכן $v_1\prec v_k$, בסתירה.

שאלה. תנו דוגמה לגרף שהוא DAG, יחד עם ייצוג רשימת שכנויות כך שהרצת DFS עליו (לפי הסדר ברשימת השכנויות) וסידור הקודקודים על פי סדר עולה של d אינו נותן מיון טופולוגי. מהו המיון הטופולוגי שמתקבל משימוש באותה הרצה של DFS וסידור הקודקודים ע"פ סדר יורד של f?

פתרון: נתבונן בגרף $y \longrightarrow x$, כאשר ייצוג רשימת השכנויות הוא:

$$\begin{array}{lcl} y & \rightarrow & \texttt{NULL} \\ x & \rightarrow & y \end{array}$$

לפי ייצוג זה, הרצת ה-DFS תתחיל ב-y ולאחר מכן תעבור ל-x. ולכן:

$$d[y] = 1 \quad f[y] = 2 \quad d[x] = 3 \quad f[x] = 4$$