מבני נתונים
תרגיל 9

גלעד אשרוב נתנאל גלרנטר

2 ביוני 2013

תאריך הגשה: בתרגול 12, בקבוצת התרגול (תאריך אחרון: 12.06.13)

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**.
חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

אנו מבקשים לחדד: **אין** הגשה בתאים, **אין** הגשה באיחור.
יש להגיש את התרגילים בשיעור התרגול בלבד.
כל סטייה מהוראות אלו יגרור פסילה של התרגיל.
בונוס של 5 נקודות יינתן לתרגיל מודפס.

1 חלק ראשון: מיונים

שאלה 1. תארו אלגוריתם שמקבל כקלט n מספרים שלמדים בין 1 ל-k ומבצע עליהם עיבוד מקדים בזמן $O(n+k)$ כך שלאחר מכן, בהינתן שני מספרים שלמים (כלשהם) a ו-b נוכל ב-$O(1)$ זמן לדעת כמה מהמספרים נמצאים בטווח $[a,b]$.

שאלה 2. במיון סלים ההנחה המוקדמת היא שהמספרים במערך מתפלגים בצורה אחידה על פני הטווח החד מימדי שלהם. בשאלה זו, תתבקשו למיין ערכים על טווח דו־מימדי:
נתונות n נקודות על המישור $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$, כאשר ידוע של נקודה מתפלגת באופן אחיד בצוך מעגל היחידה. כלומר, לכל i מתקיים: $\sqrt{x_i^2+y_i^2}\leq 1$. עליכם למיין את הנקודות לפי מרחקם מראשית הצירים, מהקטן לגדול. תארו אלגוריתם שממיין את הנקודות בתוחלת זמן ריצה $O(n)$.

2 חלק שני: ניתוח לשיעורין

שאלה 3. בהינתן סידרה של n מספרים $A=(a_1,\cdots,a_n)$, העץ הקרטזי של A מוגדר בצורה רקורסיבי בצורה הבאה. אם $n=0$, אזי העץ הוא עץ ריק. אחרת, יהי i המיקום של האיבר המינימלי ב - A. כלומר, לכל $1\leq j\leq n$, $j\neq i$, $a_j\geq a_i$. השורש של העץ הקרטזי של A הוא צומת r עם הערך a_i, הבן השמאלי של r הוא העץ הקרטזי עבור הסידרה $A_{\text{left}}=(a_1,\ldots,a_{i-1})$, והבן הימני של r הוא העץ הקרטזי $A_{\text{right}}=(a_{i+1},\cdots,a_n)$.

1. צייר עץ קרטזי עבור הסידרה $A=(5,100,3,1,45,19,40,45)$.
2. נניח ואנו רוצים להוסיף את האיבר 20 לסוף הסידרה הנ"ל. כיצד נראה העץ הקרטזי החדש?
3. מהו גובהו של העץ הקרטזי במקרה הגרוע ביותר?

4. הצג אלגוריתם המקבל כקלט עץ קרטזי עבור הסידרה $A = (a_1, \ldots, a_n)$ ומספר k, ומחזיר עץ קרטזי עבור הסידרה $A' = (a_1, \ldots, a_n, k)$. מהי סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצגת?

הנח: בייצוג העץ הקרטזי - לכל צומת קיים מצביע לבן הימני, לבן השמאלי ולאבא. בנוסף, אנחנו מחזיקים מלבד מצביע לשורש גם מצביע לאיבר האחרון a_n.

5. נניח את האלגוריתם הבא לבניית עץ קרטזי עבור הסידרה $A = (a_1, \ldots, a_n)$: מתחילים מעץ ריק המתאים לסידרה $A_0 = ()$. בכל שלב, אנחנו מפעילים את אלגוריתם ההכנסה ("השרשור") מהסעיף הקודם, ומוסיפים את האיבר הבא בסידרה. כלומר, בסיום השלב ה - i בנינו עץ קרטזי עבור הסידרה $A_i = (a_1, \ldots, a_i)$. בשלב ה־$i+1$ נכניס את האיבר ה - a_{i+1} לעץ, ונקבל עץ קרטזי שמתאים לסידרה $A_{i+1} = (a_1, \ldots, a_{i+1})$. בסיום השלב ה-$n$, אנחנו מסיימים עם עץ קרטזי עבור $A_n = A$.

הראה שהעלות לשיעורין לכל הכנסה הוא $O(1)$. במילים אחרות, הראה שבניית עץ קרטזי עבור הקבוצה A הוא במקרה הכי גרוע $O(n)$.

רמז: פתור בעזרת שיטת הפוטנציאל. הגדר את הפונקציה להיות אורך המסלול מהאיבר שהוכנס אחרון לשורש העץ.

שאלה 4. עליכם לבנות מבנה נתונים התומך בפעולות הבאות:

- הכנסה (תעשה תמיד לאינדקס הראשון שפנוי במבנה).
- גישה לאיבר באינדקס-i (עלות נדרשת - $O(1)$).
- אין צורך לתמוך בהוצאה.

עליכם לבנות מבנה נתונים התומך בפעולות הנ"ל. המטרה ־ להביא למינימום את עלות ההכנסה, ולהביא למינימום את כמות הזיכרון שלא מנוצל.

1. הראו מבנה נתונים התומך בנ"ל כך שעבור כמות זיכרון לא מנוצל - k, עלות ההכנסה היא $O(n/k)$ לשיעורין.
2. הראו מבנה נתונים כך שעבור כמות זיכרון לא מנוצל $c \cdot k$ (עבור c קבוע כלשהו), עלות ההכנסה היא $O(n/k^c)$ לשיעורין.