

מבני נתונים

תרגיל 5*

גלעד אשרוב נתנאל גלרנטר

עודכן בתאריך: 15 באפריל 2013

תאריך הגשה: בתרגול 6, בקבוצת התרגול (תאריך אחרון: 21.04.12)

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן עצמאי. חל איסור פוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1.

א. תאר אלגוריתם המקבל כקלט רשימה מקושרת ממויינת ומחזיר רשימת דילוגים אידיאלית *ideal skip list*. מהו זמן הריצה של האלגוריתם שהצגת?

ב. מה ההסתברות שבהכנסת n איברים לרשימה, נגיע למצב שבו מספר הרמות מגיע ל \sqrt{n} ?

ג. הציגו אלגוריתם לאיחוד שתי רשימות דילוגים. מהו זמן הריצה? הסבר מדוע הפתרון שלך הוא האופטימלי.

שאלה 2. נתון מערך A של מספרים חיוביים (ושונים מ-0) בגודל n . השאילתא שעליה נרצה לענות בצורה מהירה היא:

$mult(i)$: החזר את מכפלת כל המספרים במערך פלכד $A[i]$. כלומר, החזר $\prod_{j \neq i} A[j]$.

1. תארו אלגוריתם המבצע עיבוד מקדים על המערך¹, כך שניתן לענות על שאילתא בזמן $O(1)$. אלו נתונים אנו שומרים? מהי עלות העיבוד המקדים?

2. לסעיפים הבאים אנו מניחים שהמחשב לא יודע לבצע פעולות חילוק. בכל סעיף יש לציין מהי עלות העיבוד המקדים. תארו את תהליך העיבוד המקדים, כך שעלות שאילתא תהיה $O(\sqrt{n})$. יש לציין במפורש כיצד ייתבצע העיבוד המקדים, וכיצד תתבצע שאילתא. (רמז: חישבו על "נציגים")

3. תארו תהליך של עיבוד מקדים ואלגוריתם לשאילתא, כך שעלות שאילתא תהיה $O(\sqrt[3]{n})$.

4. הכלילו את התהליך, כך שעלות שאילתא תהיה $O(k \sqrt[k]{n})$. מהי כמות הזיכרון הנצרכת? מהו k האופטימלי? מהי עלות שאילתא במקרה זה?

5. חשבו על רעיון אחר לחלוטין, כך שעלות שאילתא תהיה $O(1)$, ועלות העיבוד המקדים - $O(n)$.

(ההבדל מסעיף (1) - כאן המחשב אינו יודע לבצע פעולת חילוק.)

(המשך בעמוד הבא)

*עודכן תאריך ההגשה למניעת אי הבנה. בנוסף, נוספה הערה בשאלה 2- המספרים במערך הם חיוביים וגדולים מ-0. בנוסף, יש לשים לב לעלות העיבוד המקדים בכל שלב.

¹כלומר, אנו מניחים שני שלבים - בשלב הראשון אנחנו מקבלים את המערך כקלט, מבצעים עליו איזשהו עיבוד, ושומרים את התוצאות. בשלב השני, אנחנו מקבלים סידרה של שאילתאות שעליהן נרצה לענות בצורה יעילה ומהירה בזכות המידע ששמרנו בשלב העיבוד המקדים.

שאלה 3. (ממבחן + תוספת) מספרי פיבונאצ'י מוגדרים ע"י

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

1. כתבו אלגוריתם רקורסיבי הפותר את הבעיה (בצורה הכי נאיבית). מהי סיבוכיות האלגוריתם? כתבו נוסחא המתארת את זמן הריצה של האלגוריתם, ותנו חסם עליון וחסם תחתון הדוק ככל שניתן.

2. נרצה לעשות זאת מהר יותר. לכל האורך, נניח שכל פעולת כפל, וכמו-כן - כפל של שתי מטריצות מגודל 2×2 עולה $O(1)$ זמן.

$$\text{תהי } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \text{ נשים לב שמתקיים: } \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

הסק מכאן נוסחא ל $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ כפונקציה של A , ושל $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. הסק מכאן אלגוריתם לחישוב מספר פיבונאצ'י. מהי עלות האלגוריתם?

3. נניח וחישבנו את A^8 . האם צריך עוד - 8 פעולות של כפל מטריצות בכדי לחשב את A^{16} ? הראה/י כיצד לעשות כן בפעולה אחת.

4. לפי אותו עיקרון כמו בסעיף הקודם, כמה פעולות נדרשות בכדי לחשב את A^8 ? הכלל לכל k , כאשר k חזקה שלמה של 2 (כלומר, הצג אלגוריתם). בנוסף, הצג נוסחא רקורסיבית לזמן הריצה, ופתור אותה (בעזרת אחת השיטות שלמדנו).

5. איך נחשב את A^5 ? ואת A^{12} ? הכלל לחזקה k כלשהי, לא בהכרח חזקה שלמה של 2.

6. סיכום - בהינתן k - כמה עולה האלגוריתם שהצגת לחישוב F_k ?

יום עצמאות שמח!