

מבני נתונים 89-120

תרגיל 1

נתנאל גלרנטר גלעד אשרוב

27 בפברואר 2013

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן עצמאי. חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. הוכיחו את הטענה שצינו בכיתה: יהיו $f(n), g(n)$ שתי פונקציות חיוביות. אזי, $f(n) \in O(g(n))$ וגם $f(n) \in \Omega(g(n))$ אם ורק אם $f(n) \in \Theta(g(n))$. יש להוכיח את הטענה הנ"ל **פעמיים** - ע"י כל אחת מההגדרות השקולות שראינו בכיתה.

שאלה 2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם הטענה נכונה או לא נכונה. יש להוכיח את התשובה (ע"י הוכחה במקרה הראשון, או הפרכה במקרה השני). הנח ש- $f(n), g(n)$ פונקציות לא שליליות.

א. $f(n) \in \Omega(f(n)^2)$.

ב. $f(n) + g(n) \in \Theta(\min\{f(n), g(n)\})$.

ג. $f(n) + \Omega(f(n)) \in \Theta(f(n))$.

הבהרה: תהי פונקציה $h(n) \in \Omega(f(n))$. האם $f(n) + h(n) \in \Theta(f(n))$?

ד. נתון $f(n) = \sum_{i=1}^n i \log i$. אזי: $f(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

ה. אם $f(n) \in \Theta(g(n))$ וגם $g(n) \in \Theta(h(n))$ אזי $f(n) \in \Theta(h(n))$.

ו. $n/100 \in \Omega(n)$.

ז. אם $f(n) \in O(g(n))$ וגם $g(n) \in O(f(n))$ אזי $f(n) = g(n)$.

שאלה 3. נניח שיש לנו מחשב המסוגל לבצע מיליארד הוראות בשנייה (1GHz). נתונים שלושה אלגוריתמים, אחד דורש N^2 הוראות, השני N^5 והשלישי 2^N . כמה זמן יקח (בקירוב) לאלגוריתמים לרוץ על המחשב הנ"ל עבור קלטים מגודל: 10, 20, 50, 100, 1000? (במילים אחרות, השלימו את הטבלה הבאה):

	input size				
	10	20	50	100	1000
N^2					
N^5					
2^N					

יחידת הזמן שאליה יש להתייחס היא שנייה, דקה, יום, שבוע או שנה - תלוי בגודל המספר שקיבלתם בתא המתאים בטבלה.

שאלה 4. חלקו את הרשימה הבאה למחלקות שקילות, כך ש- $f(n)$ ו- $g(n)$ שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f(n) \in \Theta(g(n))$. נתחו את הסדר שבין מחלקות השקילות שהצגתם, ומיינו אותם לפי סדר (אין צורך להוכיח כל מעבר):

$$n^{\log \log n} \quad an^2 + b \quad 2^n \quad n^n \quad n^3 \quad an^3 + d \quad \log_5 n \quad 2^{\log n} \quad 4^{\log n} \\ \log^5 n \quad \log(n!) \quad n \ln n \quad \log 2^n \quad \log^n 2 \quad 5n^2 + 6 \quad n^{\log(n!)}$$

כאשר a, b, d קבועים כלשהם (חיוביים). לאחר מיון הפונקציות הנ"ל למחלקות שקילות, בחרו עשרה זוגות של פונקציות מהנ"ל והוכיחו את הקשר ביניהם $(O, \Omega, \Theta, o, \omega)$. עליכם ליצור טענה אחת לפחות מכל סוג (כלומר, לפחות טענה אחת של $f(n) \in O(g(n))$, אחת מסוג $f(n) \in \Omega(g(n))$ וכן הלאה). בנוסף, בכל פעם שכתוב \log - הכוונה היא ללוג על בסיס 2, אלא אם כן צויין במפורש אחרת.