מבני נתונים
פתרון תרגיל 6

גלעד אשרוב

10 ביוני 2012

שאלה 1. נניח אלגוריתם מסויים X, תהי $f(\cdot)$ פונקציה חיובית כלשהי, ויהי n גודל הקלט. הסבר (במילים) את ההבדל בין המושגים הבאים:

א. עלות האלגוריתם X במקרה **הגרוע ביותר** היא $O(f(n))$.

ב. עלות האלגוריתם X **לשיעורין** היא - $O(f(n))$.

ג. עלות האלגוריתם X **בתוחלת** היא - $O(f(n))$.

הערה: בסעיף זה, הינך יכול להניח שהאלגוריתם X משתמש באקראיות.

פתרון:

א. עלות *worst case* - עבור כל קלט שהוא באורך n - האלגוריתם תמיד ירוץ פחות מ־ $O(f(n))$.

ב. מובטח לנו כי סידרה של m הפעלות האלגוריתם X (גם עבור הסידרה הגרועה ביותר) חסומה ע"י $m \cdot O(f(n))$. כלומר, האלגוריתם עלול לקבל זמני ריצה שונים עם כל הפעלה. עלות האלגוריתם בממוצע, על כל רצף הפעלות של האלגוריתם היא - $O(f(n))$ ולעיתים הפעלות של האלגוריתם עלולות להיות יקרות מ- $O(f(n))$, כלומר $\omega(f(n))$, ולעיתים קטנות יותר, כלומר $o(f(n))$.

ג. האלגוריתם משתמש באקראיות, וזמן הריצה שלו תלוי במטבעות האקראיים. זמן הריצה בתוחלת (בממוצע על פני המטבעות האקראיים) הוא $O(f(n))$. כלומר, עבור הפעלות מסויימות עם מטבעות גרועים ניתן להגיע לזמן ריצה גבוה מ-$f(n)$, ועבור מטבעות טובים, אפשר אולי אפילו לרדת מ־ $f(n)$.

שאלה 2. נניח שלפונה בינארי שהוגדר בתגול הוספנו את פעולת *decrement* (להחסיר ב־1). הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: העלות לשיעורין היא עדיין $O(1)$ לכל פעולה.

פתרון. הטענה אינה נכונה. מספיק להראות קיום של סידרה שעבורה מקבלים זמן ריצה גבוה מ- $O(1)$ בממוצע לכל פעולה. הסידרה תהיה מורכבת מהמון פעולות *increment* עד שנגיע למצב שבו הביט הראשון במונה דלוק, וכל שאר הביטים מכובים (כלומר, למצב $1000\ldots$). בשלב זה, נתחיל לבצע רצפים של זוגות $decrement, increment$. ברור שכל זוג כזה מחליף את כל הביטים, ולכן כל פעולה עולה k. ישנם 2^k פעולות עד שמגיעים למצב $100\ldots$, שעלותן היא קטנה מ - $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ (כפי שראינו בכיתה), אבל היא ודאי גדולה מ: 2^k (שכן עלות כל פעולה היא לפחות 1). אם כן, עבור סידרה של נניח, 2^{k+1} פעולות, נקבל כי:

$$T(2^{k+1}) \geq 2^k \cdot 1 + 2^k \cdot k \geq 2^k \cdot k$$

ולכן, עלות הממוצעת לכל פעולה היא:

$$\frac{T(2^{k+1})}{2^{k+1}} \geq \frac{2^k \cdot k}{2^{k+1}} \geq \frac{k}{2}$$

.

שאלה 3. נניח מחסנית התומכת בפעולות הבאות: $push, pop, multipop$, ונניח את העלויות הבאות:

$$c(push) = 1 \qquad c(pop) = 1 \qquad c(popLog) = O(\log n)$$

כאשר $popLog$ היא פעולה השולפת $\log n$ אברים מראש המחסנית, כאשר n - מספר האיברים במחסנית. מצא חסם הדוק לרצף של n פעולות, בעזרת כל אחת מהשיטות: שיטת הצבירה, (יש צורך להציג הוכחה פורמלית - כפי שמופיע בדפי הסיכום של השיעור), שיטת הבנק ושיטת הפוטנציאל.

פתרון. לא נספק הוכחה פורמלית למקרה של שיטת הצבירה, אלא רק הסבר אינטואיטיבי. שוב, כל איבר ניתן להוציא רק פעם אחת. לכן, בסה"כ ברצף של n פעולות ניתן להכניס מקסימום n איברים, ולא ניתן להוציא יותר מ- n איברים. סה"כ עלות מקסימלית - $2n$.

שיטת הבנק: כאן, נבצע בדיוק את אותו הניתוח כפי שעשינו בכיתה. עם כל הכנסה נשלם 2 יחידות: 1 עבור העלות האמיתית, אחת עבור הכנסה לבנק. עם כל הוצאה - לא נשלם כלום מהכיס, אלא נמשוך יחידה אחת מהבנק. עם כל פעולת $popLog$ - לא נשלם כלום מהכיס, ונוציא את כל העלות מהבנק. בסה"כ, נקבל כי הבנק תמיד בפלוס (תמיד כשמיגיעים למשוך יחידה מהבנק - שילמנו עליו קודם), ונקבל אם כן:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i \leq 2n$$

שיטת הפוטנציאל: כאן, נבצע בדיוק את אותו הניתוח כפי שעשינו בכיתה. פונקציאת הפוטנציאל תהיה מספר האיברים שיש כרגע במחסנית. נקבל:

$$\begin{aligned}
\hat{c}(push) &= c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1 + (k+1) - k = 2 \\
\hat{c}(pop) &= c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = 1 + (k-1) - k = 0 \\
\hat{c}(popLog) &= c_i + \phi(D_i) - \phi(D_{i-1}) = \log k + (k - \log k) - k = 0
\end{aligned}$$

מכיוון שהמצב ההתחלתי הוא מחסנית ריקה, מתקיים כי: $\phi(D_0) = 0$. לכן, לכל i, מתקיים: $\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$, וניתן להסיק:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \hat{c}_i = 2n$$

שאלה 4. בתרגול למדנו מערך דינאמי הגדל פי שניים בכל פעם, והתייחסנו לפעולת הכנסה בלבד. כעת, נתבונן במקרה בו ייתכנו פעולות הכנסה והוצאה (כאשר ההכנסה / ההוצאה מתבצעים על האיבר האחרון במערך). נניח שכעת אנו במצב של מערך בגודל n. כאשר נגיע לתפוסה מלאה במערך (מספר האיברים במערך הוא - n) נקצה מערך חדש בגודל $2n$ ונעתיק אליו את n האיברים. מן הצד השני, כאשר במערך רק $n/4$ איברים, נקצה מערך חדש בגודל $n/2$ ונעתיק את הערכים למערך החדש (עלות - $n/4$).

מצא חסם לעלות של רצף של m פעולות, לכל $m \geq 0$.

פתרון: ננתח לפי שיטת הבנק. עם כל הכנסה - נשלם 3 יחידות כפי שעשינו במקרה הרגיל. עם כל הוצאה, נוציא שתי יחידות מהכיס - אחת עבור העלות האמיתית, ועוד יחידה נפקיד לבנק. נקבל אם כן (נניח כרגע מערך מגודל n ואנחנו מיד לאחר הרחבה, כלומר, $n/2$ איברים מלאים):

- אם אנחנו מכניסים עוד $n/2$ אלמנטים, נקבל כי בבנק יש $n/2 \cdot 2 = n$ יחידות, וזוהי בדיוק העלות להקצאת מערך חדש.
- אם אנחנו מורידים $n/4$ אלמנטים, נקבל כי בבנק יש בדיוק $n/4$ יחידות, וזוהי בדיוק העלות להקטנת המערך.

כל אפשרות אחרת היא בעצם הכנסת איבר והוצאתו או הוצאת איבר והכנסתו. בשני המקרים - נישאר עם תוספת חיובית בבנק מעבר למה שאנחנו באמת צריכים. לכן, נסכם כי לעולם לא ניכנס למינוס בבנק. נקבל אם כן:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \leq \sum_{i=1}^{m} \hat{c}_i \leq 3m$$

שאלה 5. לא יפורסם פתרון לשאלה זו.