מבני נתונים
פתרון תרגיל 2

גלעד אשרוב

28 ביוני 2012

שאלה 1. הצג חסם עליון וחסם תחתון ל - $T(n)$ עבור כל אחת מנוסחאות הנסיגה הבאות. הנח ש-$T(n) = 1$ לכל $n \leq 4$. מצא חסמים הדוקים ככל שניתן, והצדק את תשובתך.

א. $T(n) = T(n/2) + 2^n$.

פתרון. כאשר נציב את הנוסחא בעצמה פעם אחת, נקבל:

$$T(n) = T(n/4) + 2^n + 2^{n/2}$$

ופעם נוספת, נקבל:

$$T(n) = T(n/8) + 2^n + 2^{n/2} + 2^{n/4}$$

הניחוש שלנו יהיה:

$$T(n) = T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^{n/2^k}$$

נוכיח את הניחוש באינדוקציה. עבור $i = 1$, נקבל:

$$T(n) = T(n/2) + 2^n$$

שזוהי בדיוק הנוסחא. נניח נכונות עבור $i - 1$, כלומר, נניח כי:

$$T(n) = T(n/2^{i-1}) + \sum_{k=0}^{i-2} 2^{n/2^k}$$

כעת, לפי הנוסחא, נקבל כי:

$$T(n/2^{i-1}) = T\left(\frac{n/2^{i-1}}{2}\right) + 2^{n/2^{i-1}} = T(n/2^i) + 2^{n/2^{i-1}}$$

נציב זאת חזרה בהנחת האינדוקציה, ונקבל:

$$T(n) = T(n/2^{i-1}) + \sum_{k=0}^{i-2} 2^{n/2^k} = T(n/2^i) + 2^{n/2^{i-1}} + \sum_{k=0}^{i-2} 2^{n/2^k} = T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^{n/2^k}$$

וסיימנו את הוכחת האינדוקציה. בכדי לסיים, נבדוק עבור איזה i נגיע לתנאי העצירה. נקבל:

$$\begin{aligned} n/2^i &= 1 \\ 2^i &= n \\ i &= \log n \end{aligned}$$

כאשר נציב $i = \log n$ ב"ניחוש", נקבל:

$$T(n) = T(n/2^i) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^{n/2^k} = T(1) + \sum_{k=0}^{\log n - 1} 2^{n/2^k} = 1 + \sum_{k=0}^{\log n - 1} 2^{n/2^k}$$

לאחר שמצאנו נוסחא מפורשת, נמצא מה הסדר גודל של הנוסחא שמצאנו. קל לראות כי:

$$T(n) = 1 + \sum_{k=0}^{\log n - 1} 2^{n/2^k} = 1 + 2^n + 2^{n/2} + 2^{n/4} + \ldots \geq 1 + 2^n \geq 2^n$$

מהצד השני:

$$T(n) = 1 + \sum_{k=0}^{\log n - 1} 2^{n/2^k} = 1 + 2^n + 2^{n/2} + 2^{n/4} + \ldots \leq 2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2 + 1 \leq 2 \cdot 2^n$$

ולכן, בסה"כ $T(n) \in \Theta(2^n)$.

ב. $T(n) = T(\sqrt{n}) + \Theta(\log\log n)$.

פתרון. נשתמש בהחלפת משתנים. נגדיר: $m = \log\log n$. לכן, $n = 2^{2^m}$, $\sqrt{n} = 2^{2^{m-1}}$, נקבל:

$$T(2^{2^m}) = T(2^{2^{m-1}}) + \Theta(m)$$

נבצע החלפת משתנים: $S(m) \stackrel{\text{def}}{=} T(2^{2^m})$:

$$S(m) = S(m-1) + \Theta(m)$$

קל לראות שהנוסחא הנ"ל הולכת ל - $\Theta(m^2)$, ולכן:

$$\begin{aligned} S(m) &\in \Theta(m^2) \\ T(2^{2^m}) &\in \Theta(m^2) \\ T(2^{2^{\log\log n}}) &\in \Theta\left((\log\log n)^2\right) \\ T(n) &\in \Theta\left((\log\log n)^2\right) \end{aligned}$$

ג. $T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6044}$.

פתרון. קל לראות כי $\sqrt{n} < n/2$ כמעט לכל n, ולכן, נסתכל על הנוסחא כאילו היא: $T(n) = T(n/2) + \sqrt{6044}$. ראינו בכיתה שנוסחא כזו הולכת ל - $\Theta(\log n)$. כעת נוכיח שנוסחא המקורית היא אכן כזו.

טענה 1. קיימים שני קבועים, $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) \leq c \cdot \log n$$

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה על n. נתחיל עם הצעד, נניח שעבור $n/2 + \sqrt{n}$ מתקיים:

$$T(n/2 + \sqrt{n}) \leq c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt{n}\right)$$

ולכן:

$$T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6044} \leq c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt{n}\right) + \sqrt{6044}$$

החל מ $n_0 = 16$, נקבל כי: $n/2 + \sqrt{n} \leq n/2 + n/4 = 3n/4$, ולכן נקבל:

$$T(n) \leq c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt{n}\right) + \sqrt{6044} \leq c \cdot \log\left(3n/4\right) + \sqrt{6044}$$

אנו שואלים עבור איזה c הנ"ל קטן מ - $c \log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c \cdot \log\left(3n/4\right) + \sqrt{6044} &\leq c \log n \\ \sqrt{6044} &\leq c \cdot (\log n - \log\left(3n/4\right)) = c \cdot (\log 4/3) \\ \frac{\sqrt{6044}}{\log(4/3)} &\leq c \end{aligned}$$

ונקבל כי עבור c כנ"ל, ועבור $n \geq 16$, צעד האינדוקציה מתקיים.

בסיס: השלם לבד. ■

נהנ"ל אנו מסיקים כי $T(n) \in O(\log n)$. כעת נראה חסם תחתון.

טענה 2. קיימים קבועים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$T(n) \geq c \cdot \log n$$

הוכחה: צעד האינדוקציה: נניח נכונות עבור $n/2 + \sqrt{n}$ שמתקיים:

$$T(n/2 + \sqrt{n}) \geq c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt{n}\right)$$

נקבל:

$$T(n) = T(n/2 + \sqrt{n}) + \sqrt{6044} \geq c \cdot \log\left(n/2 + \sqrt{n}\right) + \sqrt{6044} \geq c \cdot \log\left(n/2\right) + \sqrt{6044}$$

אנו אושלים מתי הנ"ל גדול מ - $c \cdot \log n$. נקבל:

$$\begin{aligned} c \cdot \log\left(n/2\right) + \sqrt{6044} &\geq c \cdot \log n \\ \sqrt{6044} &\geq c \cdot \log 2 \\ \sqrt{6044} &\geq c \end{aligned}$$

וקיבלנו שצעד האינדוקציה נכון לכל c קטן מספיק.

בסיס - השלם לבד. ■

ד. $T(n) = T(n-2) + \log n$.

פתרון: כאשר נציב את הטענה בעצמה נקבל:

$$T(n) = T(n-4) + \log\left(n \cdot (n-2)\right)$$

כאשר נציב פעם נוספת, נקבל:

$$T(n) = T(n-6) + \log\left(n \cdot (n-2) \cdot (n-4)\right)$$

ובאופן כללי:

$$T(n) = T(n-2i) + \log\left(\prod_{k=0}^{i-1}(n-2k)\right)$$

הוכחה באינדוקציה: השלם לבד.

נשים לב שכאשר נציב $i = n/2$ נקבל $T(0)$ או $T(1)$ (תלוי אם n זוגי או אי זוגי), ובכל אופן, שני הביטויים הנ"ל הם 1. אם כן, נקבל:

$$T(n) = 1 + \log\left(\prod_{k=0}^{n/2-1}(n-2k)\right)$$

נמצא חסם הדוק לנסוחא. קל לראות כי:

$$T(n) = 1 + \log\left(\prod_{k=0}^{n/2-1}(n-2k)\right) \leq 1 + \log n! \leq n\log n$$

ולכן $T(n) \in O(n\log n)$. ומהצד השני:

$$\begin{aligned} T(n) &= 1 + \log\left(\prod_{k=0}^{n/2-1}(n-2k)\right) = 1 + \sum_{k=0}^{n/2-1}\log(n-2k) \\ &\geq \sum_{k=0}^{n/4}\log(n-2k) \geq \sum_{k=0}^{n/4}\log\left(n/2\right) = n/4 \cdot \log(n/2) \end{aligned}$$

ולכן אנחנו גם ב - $\Omega(n\log n)$. בסה"כ $T(n) \in \Theta(n\log n)$.

ה. $T(n) = T(\alpha n) + T((1-\alpha)n) + \Theta(n)$.

לא נביא כאן פתרון מלא. בעזרת עצי רקורסיה, רואים כי: $T(n) \in \Theta(n\log n)$. נשתמש בזהות לעיל מדי פעם בקורס.

ו. $T(n) = T(\sqrt{n}) + 1$.

פתרון: ראינו בכיתה ש$T(n) \in \Theta(\log\log n)$.

ז. $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + 500n$.

פתרון: נציב $S(n) = T(n)/n$. נקבל אם כן: $T(n) = n \cdot S(n)$, ו - $T(\sqrt{n}) = \sqrt{n} \cdot S(\sqrt{n})$. נקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + 500n \\ n \cdot S(n) &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot S(\sqrt{n}) + 500n \\ n \cdot S(n) &= n \cdot S(\sqrt{n}) + 500n \\ S(n) &= S(\sqrt{n}) + 500 \end{aligned}$$

לפי סעיף קודם, רואים כי $S(n) \in \Theta(\log\log n)$. ולכן:

$$\begin{aligned} S(n) &\in \Theta(\log\log n) \\ T(n)/n &\in \Theta(\log\log n) \\ T(n) &\in \Theta(n\log\log n) \end{aligned}$$

תרגיל 2.

$$T(n) = T(\log n) + 1$$

נציב את הנוסחא בעצמה פעם אחת ונקבל:

$$T(n) = T(\log^{(2)} n) + 2$$

נציב פעם נוספת ונקבל:

$$T(n) = T(\log^{(3)} n) + 3$$

ובאופן כללי:

$$T(n) = T(\log^{(i)} n) + i$$

את הנ"ל יש להוכיח באינדוקציה. מתי נגיע ל - $T(1)$? כלומר, מתי:

$$\log^{(i)} n = 1$$

הנ"ל קורה כאשר $i = \log^* n$. כאשר $i = \log^* n$, נקבל:

$$T(n) = 1 + \log^* n$$

ולכן הנוסחא היא ב - $\Theta(\log^* n)$.

שאלה 3.

פתרון: קל לראות כי:

$$T(n) = \frac{1}{n} + \sum_{i=1}^{n-1}[T(i) - T(i-1)] = \frac{1}{n} + T(n-1) - T(0) = T(n-1) + \frac{1}{n}$$

כאשר נציב את הנוסחא בעצמה, נקבל:

$$T(n) = T(n-i) + \sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{n-k}$$

את הנ"ל יש להוכיח באינדוקציה. כאשר $i = n-1$, נקבל כי:

$$T(n) = T(1) + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{n-k} = 1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \in \Theta(\log n)$$