מבני נתונים
פתרון תרגיל 1

גלעד אשרוב

22 באפריל 2012

שימו לב: הפתרון אינו פתרון מלא.

שאלה 1. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם הטענה **נכונה תמיד**, **לעולם אינה נכונה**, או **לפעמים נכונה**. עבור שני המקרים הראשונים (נכונה תמיד / כלל אינה נכונה) הצג הוכחה. עבור המקרה השלישי (לפעמים נכונה) – הראה דוגמא שעבורה הטענה נכונה, ודוגמא עבורה הטענה אינה נכונה. הנח ש־ $f(n), g(n)$ פונקציות לא שליליות.

א. $f(n) \in O(f(n)^2)$.

פתרון: הטענה לפעמים נכונה. עבור $f(n) = n$, הטענה נכונה, בעוד שעבור $f(n) = 1/n$, הטענה אינה נכונה.

ב. $f(n) + g(n) \in \Theta(\max\{f(n), g(n)\})$.

פתרון: הטענה נכונה תמיד. מתקיים:

$$\max\{f(n), g(n)\} \leq f(n) + g(n) \leq 2\max\{f(n), g(n)\}$$

הנ"ל נכון לכל $n > 0$. (כלומר, הראינו כאן קיום שני קבועים – $c_1 = 1, c_2 = 2$ וכאמור $n_0 = 0$).

ג. $f(n) + O(f(n)) \in \Theta(f(n))$.

פתרון: הטענה נכונה תמיד. תהי $h(n) = O(f(n))$. אזי, קיים קבוע c, n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $h(n) \leq c \cdot f(n)$. אזי, לכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$f(n) \leq f(n) + h(n) \leq f(n) + c \cdot f(n) = (c+1)f(n)$$

ולכן $f(n) + h(n) \in \Theta(f(n))$.

ד. $f(n) \in \Omega(g(n))$ **וגם** $f(n) \in o(g(n))$.

פתרון: הטענה תמיד לא נכונה. אם $f(n) \in \Omega(g(n))$, אזי קיים קבועים $c > 0, n_0$ כך שלכל $n \geq n_0$: $0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$. לעומת זאת, מכיוון ש־ $f(n) \in o(g(n))$, עבור הקבוע c לעיל קיים קבוע n_0' כך שלכל $n \geq n_0'$ מתקיים: $0 \leq f(n) < cg(n)$. לכן, לכל $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$ שני האי־שיוויונים המוזכרים לעיל מתקיימים, כלומר, מתקיים בו זמנית:

$$f(n) < cg(n) \leq f(n)$$

כלומר, קיבלנו כי $f(n) < f(n)$, וזוהי סתירה.

ה. $f(n) \notin O(g(n))$ וגם $g(n) \notin O(f(n))$.

פתרון: הטענה לפעמים נכונה. עבור $f(n) = n^{1+\sin n}$ ו - $g(n) = n$ הטענה נכונה, בעוד שעבור כל $f(n), g(n)$ פולינומים, לדוגמא, הטענה אינה נכונה.

שאלה 2. מצא חסם אסימפטוטי הדוק לנסחאות לפונקציות הבאות:

1. $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i \log i$.

פתרון:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i \log i \leq \sum_{i=1}^{n} n \log n = n^2 \log n$$

ולכן $f(n) \in O(n^2 \log n)$. לעומת זאת:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i \log i \geq \sum_{i=n/2}^{n} \frac{n}{2} \log \frac{n}{2} = \frac{n^2}{4} \log \frac{n}{2}$$

ולכן $f(n) \in \Omega(n^2 \log n)$, ובסה"כ - $f(n) \in \Theta(n^2 \log n)$.

2. $f(n) = \sum_{i=1}^{\log n} i \log i$.

פתרון: בצורה דומה כמו הסעיף הקודם. $f(n) \in \Theta(\log^2 n \log \log n)$.

3. $f(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 \log i$.

פתרון: בצורה דומה כמו הסעיף הקודם. $f(n) \in \Theta(n^3 \log n)$.

שאלה 3. חלקו את הרשימה הבאה למחלקות שקילות, כך ש- $f(n)$ ו - $g(n)$ שייכות לאותה מחלקה אם ורק אם $f(n) \in \Theta(g(n))$. נתחו את הסדר שבין מחלקות השקילות שהצגתם, ומיינו אותם לפי סדר (אין צורך להוכיח כל מעבר):

$$n^{\log \log n} \quad 2^n \quad 3^n \quad n! \quad n^3 \quad \frac{1}{n} \quad (n+1)! \quad 4^{\log n} \quad n^2$$
$$n^{\log n} \quad \log(n!) \quad n \ln n \quad \log 2^n \quad \log^n 2 \quad 5n^2+6 \quad n^{\log(n!)}$$

פתרון: כל שורה היא מחלקת שקילות. השורות ממוינות מהקטן לגדול:

- $1/n$.
- $\log^n 2 = 1^n = 1$.
- $\log 2^n = n \log 2 = n$.
- $n \log n, \log(n!)$
- $n^2 = 4^{\log n}$, $5n^2 + 6$.
- n^3.

- $n^{\log \log n}$.
- $n^{\log n}$.
- $n^{\log n!}$.
- 2^n
- 3^n
- $n!$
- $(n+1)!$