מבני נתונים - תרגול 2
פתרון נוסחאות נסיגה*

25 במרץ 2012

תקציר

בשיעור זה נלמד כיצד פותרים נוסחאת נסיגה, כלומר, שיוויון המתאר פונקציה בעזרת הערכים שהפונקציה מקבלת על קלטים קטנים יותר. נלמד שלוש שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה - שיטת האיטרציה, שיטת ההצבה ושיטת עצי הרקורסיה. בנוסף נלמד "טריק" החלפת נשתנים.

1 הקדמה קצרה

לעיתים כדי לפתור בעיות מסוימות, אנו נאלצים להשתמש ב**רקורסיה**. כלומר, אנו משתמשים בפתרון הבעיה על קלט קטן יותר, כדי לפתור את הבעיה על קלט גדול יותר. דוגמא אחת שראינו בשיעור שעבר היא "חישוב נוסחאת פיבונצ'י". דוגמא אחרת היא "מגדלי הנוי". האלגוריתם להעברת n טבעות במגדלי הנוי הוא ידוע[1], נתאר כעת את זמן הריצה שלו.

נסמן ב - $T(n)$ את מספר ההעברות הנצרכות כדי להעביר n טבעות. נשים לב ש - $T(1)=1$. בנוסף, לפי האלגוריתם הידוע, מתקיים:

$$T(n)=2T(n-1)+1$$

מהו סדר גודל של הפונקציה $T(n)$? כיצד נמצא נוסחא מפורשת לפונקציה זו? על כך ננסה לענות בשיעור הקרוב.

2 שיטת האיטרציה

בשיטת ההצבה, נמצא פתרון מפורש בצורה הבאה:

- נציב את הנוסחא בעצמה.
- "ננחש" מבנה כללי (צעד זה דורש מעט חשיבה).
- נוכיח את ה"ניחוש" בעזרת אינדוקציה.
- נציב את תנאי ההתחלה, ונמצא נוסחא מפורשת.

דוגמא. נסתכל על הנוסחא הבאה:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1)+1 \\ T(1) &= 1 \end{aligned}$$

*נכתב ע"י גלעד אשרוב. מבוסס על פרק 4 בספר "מבוא לאלגוריתמים", הוצאת האוניברסיטה הפתוחה.

[1] ציירנו אותו בכיתה. מי שאינו מכיר יכול למוצאו ברשת בקלות.

שלב ראשון - הצבת הנוסחא בעצמה. מהנוסחא, אנו לומדים כי:

$$T(n-1) \quad = \quad 2T(n-2)+1$$

נציב זאת חזרה בנוסחא המקורית ונקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(n-1)+1 \\ T(n) &= 2\left(2T(n-2)+1\right)+1 \\ T(n) &= 4T(n-2)+(2+1) \end{aligned}$$

התחלנו עם נוסחא $T(n)$ התלויה ב - $T(n-1)$, הצבנו אותה בעצמה וקיבלנו נוסחא שתלויה ב - $T(n-2)$. התקווה היא שאם נמשיך בתהליך הזה עוד ועוד, נגיע לנוסחא שתלויה רק ב $T(1)$ - ואת הערך הנ"ל אנחנו כבר יודעים. נבצע צעד נוסף: לפי הנוסחא, אנחנו יודעים כי:

$$T(n-2) = 2T(n-3)+1$$

לכן, ניתן להציב ולקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= 4T(n-2)+(2+1) \\ T(n) &= 4(2T(n-3)+1)+(2+1) \\ T(n) &= 8T(n-3)+(4+2+1) \end{aligned}$$

וקיבלנו $T(n)$ כפונקציה של $T(n-3)$.

שלב שני - ניחוש מבנה כללי. לסיכום, ראינו את שלושת הקשרים הבאים:

$$\begin{aligned} (1) \qquad T(n) &= 2T(n-1)+1 \\ (2) \qquad T(n) &= 4T(n-2)+(2+1) \\ (3) \qquad T(n) &= 8T(n-3)+(4+2+1) \end{aligned}$$

כעת, בהינתן הקשרים הנ"ל, "ננחש" שהצורה הכללית היא:

$$T(n) = 2^i T(n-i) + (2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+1)$$

נשים לב כי:

$$(2^{i-1}+2^{i-2}+\ldots+1) = \sum_{k=0}^{i-1} 2^k = 2^i - 1$$

ולכן למעשה, הניחוש שלנו הוא:

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^i - 1$$

שלב שלישי - הוכחת הניחוש. נוכיח שהניחוש הנ"ל הוא נכון. כלומר, אנו טוענים:

טענה 1. לכל $1 \leq i < n$, מתקיים:

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^i - 1$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על i. בסיס: $i = 1$, נקבל:

$$T(n) = 2^1 T(n-1) + 2^1 - 1 = 2T(n-1) + 1$$

וזוהי בדיוק הנוסחא שהתחלנו איתה, כלומר - ההגדרה של הבעיה.
צעד: נניח שהטענה נכונה $i < k$. נראה שהטענה נכונה עבור $i = k$. עפ"י הנחת האינדוקציה:

$$T(n) = 2^{k-1} T(n-(k-1)) + 2^{k-1} - 1$$

נציב:

$$T(n-(k-1)) = 2T(n-(k-1)-1) + 1 = 2T(n-k) + 1$$

ונקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2^{k-1} T(n-(k-1)) + 2^{k-1} - 1 \\ &= 2^{k-1}\left[2T(n-k)+1\right] + 2^{k-1} - 1 \\ &= 2^k T(n-k) + 2^{k-1} + 2^{k-1} - 1 \\ &= 2^k T(n-k) + 2^k - 1 \end{aligned}$$

■

שלב רביעי - הצבת תנאי ההתחלה וסיום. הערך היחידי שאנחנו יודעים הוא תנאי ההתחלה - $T(1) = 1$. נרצה לבטא את $T(n)$ בעזרת $T(1)$. הוכחנו כי לכל $1 \le i < n$:

$$T(n) = 2^i T(n-i) + 2^i - 1$$

לכן, בפרט הנוסחא הנ"ל נכונה עבור $i = n-1$. במקרה זה נקבל:

$$T(n) = 2^{n-1} T(n-(n-1)) + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} T(1) + 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} \cdot 1 + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

ומצאנו נוסחא מפורשת ל-$T(n)$.

3 שיטת ההצבה ("האידוקציה")

בשיטה זו, לא נמצא פתרון מפורש לפונקציה. שיטה זו תעזור לנו להכיח חסם תחתון/עליון/הדוק לפונקציה. ראשית יש "לנחש" לאיזו מחלקה הפונקציה שייכת (או שהטענה ידועה), וכל שאנו רוצים הוא להוכיח שאכן זהו החסם. שיטה זו היא בפשטות... אינדוקציה.
נתבונן בנוסחא הבאה:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n \\ T(n) &= 1 \end{aligned}$$

נראה ש- $T(n) \in O(n \log n)$. כלומר, הטענה שלנו היא הטענה הבאה:

טענה 2. קיימים קבועים חיוביים c, n_0 כך שלכל $n > n_0$,

$$T(n) \le cn \log n$$

.

(אנו נמצא את הקבועים c, n_0 תוך כדי ההוכחה.)
הוכחה: בסיס: נראה בהמשך...
צעד: נניח שהחסם מתקיים עבור $n/2$, כלומר קיים c, כך ש:

$$T(n/2) \leq c \cdot \frac{n}{2} \log(\frac{n}{2})$$

כעת, עפ"י ההגדרה:

$$\begin{aligned} T(n) = 2T(n/2) + n &\leq 2c\frac{n}{2}\log\frac{n}{2} + n \\ &= cn(\log n - 1) + n \\ &= cn\log n - cn + n \end{aligned}$$

נרצה ש$T(n) \leq cn\log n$. כלומר, אנחנו רוצים שיתקיים:

$$\begin{aligned} T(n) \leq cn\log n - cn + n &\leq cn\log n \\ -cn + n &\leq 0 \\ n &\leq cn \\ 1 &\leq c \end{aligned}$$

כלומר, הצעד מתקיים לכל $c \geq 1$.
לגבי הבסיס:

$$T(2) = 2T(1) + 2 = 2 \cdot 1 + 2 = 4$$

הטענה דורשת כי:

$$4 = T(2) \leq c \cdot 2\log 2 = c \cdot 2 \cdot 1 = 2c$$

ומכאן הבסיס מתקיים לכל $c \geq 2$.
אם נבחר, לדוגמא $c = 3$, $n_0 = 1$, נקבל כי לכל $n > 1$:

$$T(n) \leq c \cdot n\log n$$

כלומר, את מה שרצינו להוכיח. ∎

מתי משתמשים בשיטה זו? כאמור, בשיטה זו אנחנו צריכים ל"נחש" את הטענה, כלומר, את המשפחה אליה שייכת הפונקציה. לכן, בשיטה זו נשתמש בעיקר לתרגילים מהצורה:

$$T(n) = 2T(n/2 + 17) + n$$

אם נשתמש כאן בשיטת האיטרציה, הנוסחאות תהיינה מסובכת מאוד, כאשר הגורם שמפריע לנו לפתרון הוא ה־17 שבתוך הנוסחא. לכן, נחשב את הפונקציה תוך כדי התעלמות מאותו גורם שמפריע לנו. נחשב את הנוסחא $S(n) = 2S(n/2) + n$, נגיע לנוסחא כלשהי (נגיע ל - $O(n\log n)$), ונוסחא זו תהיה ה"ניחוש" שלנו עבור הנוסחא המקורית $T(n)$. כלומר, לאחר שפתרנו את $S(n)$, נשתמש בפתרון כניחוש עבור $T(n)$, וכעת נוכיח שהוא ניחוש נכון בעזרת שיטת האינדוקציה.

3.1 לשים לב כשמשתמשים בשיטת באינדוקציה(!)

התרגיל הבא ממחיש בעיתיות מסוימת שיש לשים אליה לב כשמשתמשים בשיטה זו.

דוגמא נוספת. נתבונן בנוסחא הבאה:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1$$

נרצה להראות כי $T(n) \in O(n)$. כלומר, הטענה:

טענה 3. קיים קבועים c, n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים:

$$T(n) \leq c \cdot n$$

נסיון הוכחה. נתחיל מהצעד. נניח נכונות עבור $n/2$:

$$T(n/2) \leq c \cdot n/2$$

לכן:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \leq 2 \cdot c\frac{n}{2} + 1 = cn + 1$$

ולכאורה, הנ"ל הוא ב־ $O(n)$ והכל נראה בסדר. אבל, נשים לב שאנחנו רוצים להוכיח כי: $T(n) \leq cn$ (שכן זוהי טענת האינדוקציה), אבל לכל קבוע c מתקיים: $cn + 1 \geq cn$, כלומר, למעשה, **לא הצלחנו להוכיח את הדרוש!** נשנה מעט את הטענה, כך שעדיין נוכל להסיק כי $T(n) \in O(n)$.

טענה 4. קיימים קבועים $b, c, n_0 > 0$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים:

$$T(n) \leq cn - b$$

הוכחה: שוב, באינדוקציה על n. נניח נכונות עבור $n/2$:

$$T(\frac{n}{2}) \leq c \cdot \frac{n}{2} - b$$

כעת:

$$T(n) = 2T(n/2) + 1 \leq 2\left(c \cdot \frac{n}{2} - b\right) + 1 = cn - 2b + 1$$

כזכור, אנחנו רוצים להראות כי: $T(n) \leq cn - b$, ולכן:

$$\begin{aligned} cn - 2b + 1 &\leq cn - b \\ 1 &\leq b \end{aligned}$$

ולכן הטענה הנ"ל מתקיימת לכל $c > 0$ ולכל $b \geq 1$.

בסיס: השלם לבד. ■

בעזרת הטענה שהוכחנו כרגע, אנו מסיקים כי $T(n) \in O(n)$.

4 החלפת משתנים

נתבונן בדוגמא הבאה:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\sqrt{n}) + \log n \\ T(2) &= 1 \end{aligned}$$

פתרון בעזרת החלפת משתנים. נגדיר משתנה חדש: $m = \log n$. נשים לב שמתקיים בעצם: $n = 2^m$, ולכן:

$$\sqrt{n} = n^{1/2} = (2^m)^{1/2} = 2^{m/2}$$

לכן, ניתן לכתוב את הנוסחא הרקורסיבית שלנו בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} T(2^m) &= 2T(2^{m/2}) + m \\ T(2) &= 1 \end{aligned}$$

כעת, נגדיר $S(m) \stackrel{\text{def}}{=} T(2^m)$. לכן, מתקיים גם: $S(m/2) = T(2^{m/2})$. נקבל:

$$S(m) = 2S(m/2) + m$$

בנוסף, עבור תנאי העצירה, מתקיים $S(1) = T(2^1) = T(2) = 1$. כלומר, למעשה קיבלנו את הנוסחא הבאה:

$$\begin{aligned} S(m) &= 2S(m/2) + m \\ S(1) &= 1 \end{aligned}$$

נשים לב שכבר פתרנו את התרגיל הנ"ל, בתחילת חלק 3, והפתרון היה $O(m \log m)$. כלומר, קיבלנו:

$$S(m) = T(2^m) \in O(m \log m)$$

נציב חזרה $m = \log n$ (או - $2^m = n$), נקבל:

$$\begin{aligned} T(2^m) &= O(m \log m) \\ T(n) &= O(\log n \log \log n) \end{aligned}$$

5 שיטת עצי רקורסיה

בשיטת עצי רקורסיה נשתמש כאשר יש יותר מפיצול אחד ברקורסיה, והפיצללים לא שווים. כלומר, למשל:

$$T(n) = 3T(n/8) + 7T(n/12) + 4n$$

בשיטה זו אנחנו פשוט מציירים את עץ הרקורסיה, ומציירים למעשה "עץ קריאות". בנוסף, לכל קריאה אנחנו מחשבים את כמות העבודה שבוצעה באותה הקריאה (לדוגמא, עבור הנוסחא הנתונה, הקריאה $T(n)$ קוראת לשתי 10 קריאות רקורסיביות - 3 פעמים $T(n/8)$, ו־7 פעמים $T(n/12)$. בנוסף, הקריאה מבצעת $4n$ עבודה). לאחר שציירנו את הקריאות, ואת העבודה שבוצעה בכל קריאה, מחשבים את כמות העבודה הכללית בכל רמה בעץ.

דוגמא.

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

נעיר ששורש העץ מסומן ברמה 1.

ציור העצים - חסר (להשלים ממה שראינו בכיתה).

יש לנו שתי טענות שאותן נרצה להוכיח:

טענה 5. ברמה ה - i יש 3^i קריאות ל - $T(n/4^i)$.

הוכחה: בסיס: ברמה ה־1 (בשורש) יש 3 קריאות ל - $T(\frac{n}{4})$. נכון על פי הנוסחא.

צעד: נניח שברמה ה - k יש 3^k קריאות ל - $T(\frac{n}{4^k})$.

לפי הנוסחא, ברמה ה־ $k+1$, כל נוסחא כזו תקרא ל - 3 קריאות ל - $T(n/4^{k+1})$. נקבל אם כן שברמה ה - $k+1$ יש $3\cdot 3^k = 3^{k+1}$ קריאות ל - $T(n/4^{k+1})$. ∎

טענה נוספת לגבי העבודה:

טענה 6. ברמה ה - i מתבצע $3^{i-1}\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה.

הוכחה: לפי האינדוקציה הקודמת ברמה ה - $i-1$ יש 3^{i-1} קריאות ל - $T(n/4^{i-1})$. קריאות אלו הן העבודה שמבוצעת ברמה ה - i. לפי הנוסחא, כל קריאה כזו מבצעת $\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה. לסיכום, ברמה ה i־ מתבצע:

$$3^{i-1}\cdot\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$$

עבודה. ∎

סיום החישוב: נסכם את העבודה שמבצעים בכל הרמות בעץ. בעץ ישנם $\log_4 n$ רמות (למה?), אם כי - זה לא באמת משנה כמה רמות יש בעץ (נראה מיד מדוע). נקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{\log_4 n} 3^{i-1}\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 3^i\left(\frac{n}{4^i}\right)^2 = n^2\cdot\sum_{i=1}^{\log_4 n-1}\left(\frac{3}{4^2}\right)^i \\ &= n^2\cdot\sum_{i=1}^{\log_4 n-1}\left(\frac{3}{16}\right)^i \le n^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{16}\right)^i = n^2\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{3}{16}}\right) = \frac{16}{13}n^2 = O(n^2)\end{aligned}$$

אנו מקבלים חסם הדוק $\Theta(n^2)$ בזכות העובדה שכבר ברמה הראשונה מתבצע n^2 עבודה.