מבני נתונים
תרגיל 9

גלעד אשרוב　　ברקאי נטע　　צבי קופולביץ'

23 במאי 2012

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן **עצמאי**. חל איסור מוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

תאריך הגשה: בתרגול 10 (תאריך אחרון: 03.06.2012)

שימו לב: תאריך הגשה אחרון הוא הפעם ביום ראשון ולא יום רביעי!

שאלה 1.

1. הכנס את הקודקודים הבאים לעץ AVL לפי סדר, משמאל לימין (כלומר, התחל עם 13). יש לצייר את העץ המתקבל לאחר כל הכנסה, ולציין את הרוטציות שבוצעו.

$$13, 15, 5, 19, 2, 21, 4, 24, 7, 9, 1, 12$$

2. הוצא את הקודקוד 21 וצייר את העץ המתקבל בכל אחד מהשלבים.
3. נניח עץ AVL שבו לכל קודקוד x שומרים בנוסף גם את גודל העץ- כלומר, מספר האיברים בתת העץ המושרש בקודקוד x. הראו כיצד לעדכן את השדה הנ"ל עם אלגוריתם ההכנסה של AVL.

שאלה 2. (ממבחן) בהוכחה על הגובה של עץ AVL ראינו שלעץ כזה בעל גובה m יש לפחות F_m קודקודים, כאשר F_m היה קשור למספר $Fibonacci$. היינו יכולים לקבל חסם לוגריתמי על הגובה העץ בצורה יותר פשוטה מזו שראינו בהרצאה. ראינו ש: $F_m = F_{m-1} + F_{m-2} + 1$.

א. השתמש בעובדה ש $F_{m-1} > F_{m-2}$ כדי לקבל חסם חדש על F_m.

ב. מה ניתן להסיק מהחסם ב(א) על הגובה של עץ AVL?

ג. נגדיר עץ AVL2 שבו מתקיים לכל קודקוד x ההפרש בין גובה תת־עצים של העץ ש-x שורשו, הוא קטן שווה 2. אם T_h מסמן את מספר הקודקודים המינימלי בעץ AVL2 שגובהו h הגדר את T_h ע"י נתינת ערכי קצה ובניית נוסחה רקורסיבית.

ד. מהן היתרונות והחסרונות של השימוש ב-AVL2 לעומת עץ AVL?

שאלה 3. עץ טרינרי מושלם הוא עץ שלכל קודקוד פנימי יש 3 בנים. שימו לב שלעץ כזה תמיד מספר עלים אי זוגי. הוכח באינדוקציה על מבנה העץ שלעץ טרינרי מושלם עם n עלים יש $(n-1)/2$ קודקודים פנימיים.

שאלה 4. עץ חיפוש בינארי ייקרא "עץ אדום שחור" אם הוא עץ שלם[1] ומקיים את התכונות הבאות:

1. כל צומת צבוע ב"אדום" או "שחור".
2. כל עלה צבוע ב"שחור".
3. אם צומת הוא אדום, אז שני בניו שחורים.
4. כל המסלולים מכל קודקוד לכל העלים שהם צאצאיו, מכילים את אותו המספר של צמתים שחורים.

ענה על הסעיפים הבאים:

א. מה ניתן להגיד על צבעם של הקדקדים במסלול מהשורש לעלה כלשהו ? (מהו יחס כמות הצמתים השחורים לעומת האדומים?)

הבהרה: עליכם לחשוב על מקרה כללי ולא להתמקד בהכרח בדוגמא שלפניכם.

ב. נגדיר את "הגובה השחור" כדלהלן:

הגדרה 1. (גובה שחור) לכל צומת x נגדיר "גובה השחור" ($black\ height$) של x, כמספר הקודקודים השחורים בכל מסלול מצומת x ועד לעלה (לא כולל את הצומת x עצמו). נסמן מספר זה ב - $bh(x)$.

בדוגמא שלפניכם, עבור הקודקוד 8, גובהו השחור הוא: $bh(8) = 2$. בצורה דומה, ציין לכל קודקוד את הגובה השחור שלו.

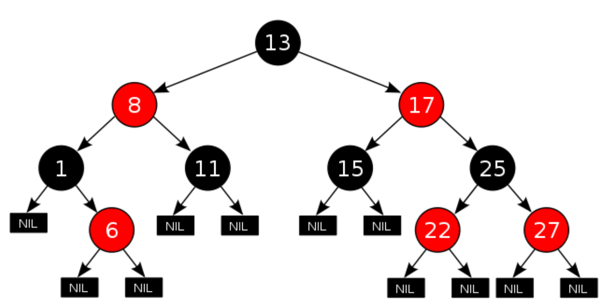
ג. נניח שבעץ h רמות, ויהי x השורש. הסבר מדוע: $bh(x) \geq h/2$.

ד. יהי x קודקוד פנימי, ויהיו y, z שני בניו. הוכח כי: $bh(x) \leq bh(y) + 1$ (ובאותו אופן גם: $bh(x) \leq bh(z) + 1$).

ה. הוכח את הטענה הבאה: לכל קודקוד x בעץ אדום שחור, תת העץ המושרש ב - x (כלומר, תת העץ ש-x הוא השורש שלו) מכיל לפחות $2^{bh(x)} - 1$ צמתים פנימיים. (ההוכחה היא באינדוקציה על גובהו של x, והשתמשו בסעיף הקודם).

ו. השתמש בסעיפים ג' ו-ה' בכדי להראות שגובהו של עץ אדום שחור בעל n צמתים פנימיים הוא לכל היותר $2\log(n+1)$.

דוגמא לעץ אדום שחור:



[1] **תזכורת:** עץ שלם הוא עץ שבו כל צומת הוא או עלה, או שיש לו שני בנים.