

מבני נתונים

תרגיל 3

גלעד אשרוב נטע ברקאי צבי קופלוביץ'

28 במרץ 2012

תאריך הגשה: בתרגול 4, בקבוצת התרגול (תאריך אחרון: 17.04.12)

ההגשה ביחידים. מותר להתייעץ ולפתור את התרגילים בקבוצה אך יש לכתוב את הפתרונות באופן עצמאי. חל איסור פוחלט להחזיק פתרון כתוב של סטודנט אחר.

שאלה 1. הוכח את חסם האיחוד. כלומר, יהיו A_1, \dots, A_n מאורעות. אזי מתקיים:

$$\Pr \left[\bigvee_{i=1}^n A_i \right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr [A_i]$$

שאלה 2. נניח אלגוריתם אקראי A שעבור כל קלט x , מחזיר את התוצאה הנכונה בהסתברות $1/2$, ומחזיר "לא יודע" בהסתברות $1/2$. השאלה האם יחזיר את התשובה הנכונה או "לא יודע" תלויה באקראיות של האלגוריתם A בלבד, ולכן, ייתכן בהחלט שאם החזיר "לא יודע" בפעם הראשונה ונריץ אותו שוב, יחזיר את התוצאה הנכונה בהרצה השנייה.

כעת, נניח אלגוריתם B העובד בצורה הבאה: B מריץ את A שוב ושוב, כל עוד A מחזיר "לא יודע". ברגע ש- A מחזיר תשובה אחרת, B עוצר, ומחזיר את התשובה ש- A החזיר.

1. מהי ההסתברות שהאלגוריתם B יצטרך להריץ את A יותר מ-100 פעמים בכדי לקבל תשובה נכונה?

2. מהי תוחלת מספר הפעמים שהאלגוריתם B מריץ את A ?

3. חזור על שני הסעיפים הקודמים תחת ההנחה שאלגוריתם A מחזיר תשובה נכונה בהסתברות p ו"לא יודע" בהסתברות $1-p$, עבור איזשהו $0 < p < 1$.

שאלה 3. נניח אנו מטילים קוביה 10 פעמים.

1. מהי ההסתברות שבכל הפעמים נקבל 6?

2. מהי ההסתברות שבכל הפעמים נקבל את אותה התוצאה?

3. מהי ההסתברות שבדיק ב-4 הטלות נקבל את התוצאה 5?

4. תאר נוסחא כללית. מהי ההסתברות שב- k מהמקרים נקבל את התוצאה x (עבור $x \in \{1, \dots, 6\}$)?

5. מהי תוחלת סכום ההטלות?

שאלה 4. מגרילים גרף באקראי עם n קודקודים בצורה הבאה: לכל זוג קודקודים בגרף מטיילים מטבע השווה 1 בהסתברות p (עבור $0 < p < 1$). אם המטבע יצא 1 - מגדירים קשת בין זוג הקודקודים בגרף.

1. חשב את תוחלת מספר הקשתות בגרף.

רמז: הגדר משתנה מקרי עבור כל קשת, והשתמש בלינאריות התוחלת.

2. קליק בגרף בגודל k היא תת קבוצה של קודקודים בגודל k כך שקיימת קשת בין כל זוג קודקודים בתת קבוצה זו. מצא חסם תחתון להסתברות שלא קיים בגרף קליק בגודל k ?

רמז: התבוננו בשאלה שפתרנו בכיתה לגבי התנגשות כדורים שנזרקים לתאים.

שאלה 5. באוניברסיטה מסוימת במרכז הארץ, נלמד הקורס "מבני נתונים". הסטודנטים בקורס קיבלו תרגיל לשיעורי בית ובו רשימה של פונקציות שעליהם למיין לפי סדר גודל. בנוסף, הסטודנטים התבקשו לבחור מהרשימה 5 זוגות של פונקציות, ולהוכיח לגביהן טענה מסוימת.

1. בהינתן שברשימה היו סה"כ 16 פונקציות - כמה זוגות של פונקציות ניתן להרכיב בסה"כ?

2. תחת ההנחה שכל סטודנט בחר באקראי בהתפלגות אחידה ובצורה בלתי תלויה את חמשת הזוגות, מה ההסתברות ששני סטודנטים נתונים בחרו **בדיוק** את אותם חמשת הזוגות?

3. אם ישנם 100 סטודנטים בקורס בסה"כ, מצא חסם עליון להסתברות שישנם שני סטודנטים כלשהם עם אותם חמישה זוגות בדיוק?

4. **בנוסף:** בהינתן התוצאות שלעיל, מה מתרגלי הקורס עלולים להסיק אם נמצאו שני סטודנטים כלשהם עם אותם חמישה זוגות? ☺

רמז: התבוננו בשאלה שפתרנו בכיתה לגבי התנגשות כדורים שנזרקים לתאים.

פסח כשר ושמח!