

שיטת עצי רקורסיה - טענות האינדוקציה

גלעד אשרוב

8 במרץ 2011

מסמך זה הוא השלמה למה שראינו בכיתה.

$$T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{4}\right) + n^2$$

נעיר ששורש העץ מסומן ברמה 1.
יש לנו שתי טענות שאותן נרצה להוכיח:

טענה 1. ברמה ה- i יש 3^i קריאות ל- $T(n/4^i)$.

הוכחה: בסיס: ברמה ה-1 (בשורש) יש 3 קריאות ל- $T(n/4)$. נכון על פי הנוסחה.

צעד: נניח שברמה ה- k יש 3^k קריאות ל- $T(n/4^k)$.

לפי הנוסחה, ברמה ה- $k+1$, כל נוסחה כזו תקרא ל-3 קריאות ל- $T(n/4^{k+1})$. נקבל אם כן שברמה ה-

$k+1$ יש $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ קריאות ל- $T(n/4^{k+1})$.

טענה נוספת לגבי העבודה:

טענה 2. ברמה ה- i מתבצע $3^{i-1} \left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה.

הוכחה: לפי האינדוקציה הקודמת ברמה ה- $i-1$ יש 3^{i-1} קריאות ל- $T(n/4^{i-1})$. קריאות אלו הן העבודה

שמבוצעת ברמה ה- i . לפי הנוסחה, כל קריאה כזו מבצעת $\left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$ עבודה. לסיכום, ברמה ה- i מתבצע:

$$3^{i-1} \cdot \left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2$$

עבודה.

סיום החישוב: נסכם את העבודה שמבצעים בכל הרמות בעץ. בעץ ישנם $\log_4 n$ רמות (למה?), אם כי זה לא

באמת משנה כמה רמות יש בעץ (נראה מיד מדוע). נקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &= \sum_{i=1}^{\log_4 n} 3^{i-1} \left(\frac{n}{4^{i-1}}\right)^2 = \sum_{i=0}^{\log_4 n-1} 3^i \left(\frac{n}{4^i}\right)^2 = n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{4^2}\right)^i \\ &= n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\log_4 n-1} \left(\frac{3}{16}\right)^i \leq n^2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{16}\right)^i = n^2 \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{3}{16}}\right) = \frac{16}{13}n^2 = O(n^2) \end{aligned}$$

אנו מקבלים חסם הדוק $\Theta(n^2)$ בזכות העובדה שכבר ברמה הראשונה מתבצע n^2 עבודה.