

# מבני נתונים 89-120

## תרגיל 8

כינרת ברגר

גלעד אשרוב

30 במאי 2011

ההגשה ביחידים. כל סטודנט נדרש לכתוב בעצמו ולבדו את הפתרון.  
**נא לציין שם, תעודת זהות ומספר קבוצה על גבי הפתרון!**  
תאריך הגשה: 12.06

### שאלה 1.

- (א) הכנס את האיברים הבאים לעץ 2-3 ריק: 10, 12, 60, 39, 23, 0, 9, 2, 24.  
צייר את העץ לאחר כל הכנסה.
- (ב) נניח פונקציית hash:  $h(x) = x \bmod 11$ , ונניח מערך מגודל 11.  
הכנס את האיברים הבאים: 12, 14, 15, 11, 10, 2, 6, 25, 27, 122.  
הצג את המערך המתקבל כאשר:
- 1) משתמשים בשיטת ה – chaining לטיפול בהתנגשויות.
  - 2) משתמשים בשיטת ה – open addressing.

### שאלה 2. הוכח / הפרך:

- א. בהינתן עץ 2-3 שבו לשורש 2 בנים, נסמן ב-R את מספר הקודקודים בתת העץ הימני וב-L את מספר הקודקודים בתת העץ השמאלי. נניח בה"כ כי  $L > R$ . בהכרח מתקיים:  $L \geq 6R$ .
- ב. בהינתן עץ 2-3, אם נכניס איבר חדש וישר נוציא אותו, העץ לא ישתנה.
- ג. קיימת סדרת איברים שהכנסתה (לפי הסדר) לעץ 2-3 תיצור עץ בינארי שלם (לכל צמת 2 בנים או 0 בנים) בגובה 3.
- ד. קיימת סדרת איברים שהכנסתה (לפי הסדר) לעץ 2-3 תיצור עץ טרינארי (לכל צמת 3 בנים או 0 בנים) בגובה 3.
- בשני הסעיפים האחרונים, אם התשובה נכונה, מצאו סדרה כזו ואם לא, הסבירו מדוע זה לא יתכן.

### שאלה 3.

- א. בהינתן עץ 2-3 הסבירו כיצד בעזרת  $O(n)$  מקום נוסף, נוכל לבצע את השאילתא הבאה בזמן  $O(1)$ :
- Find\_Num(T,v) – מקבלת עץ T וצמת v בעץ (ע"י מצביע), ומחזירה מהו גודל תת העץ ששורשו v. (גודל תת העץ הוא מספר העלים בתת העץ)

ב. בהינתן עץ חיפוש רגיל הסבירו כיצד בעזרת  $O(n)$  מקום נוסף, נוכל לבצע את השאילתא הבאה בזמן  $O(\log n)$ :  
**Find\_Small(T,x)** – מקבלת עץ T ומספר x ומחזירה כמה איברים בעץ קטנים ממש מ-x.

בשתי השאלות הסבירו כיצד תעדכנו את המקום הנוסף בפונקציות הרגילות (הוספה, מחיקה וחיפוש).

- שאלה 4.** (ממבחן) נתבונן בשיטה הבאה למיון קבוצה  $A_0$  של  $n$  מספרים שונים: נחלק את  $A_0$  ל- $\sqrt{n}$  תת-קבוצות זרות בגודל  $\sqrt{n}$  כל אחת. אח"כ נבחר בכל פעם את האיבר הקטן ביותר מתוך אלה שעוד לא נבחרו ע"י שנמצא (בזמן לינארי) את האיבר הקטן ביותר בתוך כל אחת מ- $\sqrt{n}$  הקבוצות (נקרא לקבוצות  $\sqrt{n}$  הקטנים האלה  $A_1$ ). ואז נמצא את האיבר הקטן ביותר ב- $A_1$ .
- א. כמה זמן לוקח מציאת האיבר הקטן ביותר? והשני? ה- $l$ ,  $l=2,3,\dots,n$ ? סכמי: מה הסיבוכיות של שיטת מיון זו?
- ב. האם יעזור אם, במקום לחזור ולחפש שוב ושוב את האיבר הקטן ביותר בכל קבוצה, נמייין את  $\sqrt{n}$  הקבוצות מיד בהתחלה?
- ג. כדי לשפר נחלק את  $A_0$  ל- $n^{2/3}$  קבוצות בגודל  $n^{1/3}$  כל אחת. נקבל קבוצה  $A_1$  בגודל  $n^{2/3}$  ולכן גם אותה נחלק ל- $n^{1/3}$  קבוצות בגודל  $n^{1/3}$ . נקרא לקבוצת האיברים המינימאליים בשם  $A_2$ . כמה זמן לוקח מציאת האיבר הקטן ביותר? והשני? ה- $l$ ,  $l=2,3,\dots,n$ ? סכמי: מה הסיבוכיות של שיטת מיון זו?
- ד. תאר/י בקצרה הכללה של השיטה של סעיף א (רמה נוספת אחת) ושל סעיף ג (2 רמות נוספות) ל- $k$  רמות נוספות. מה תהיה הסיבוכיות?
- ג. מהו הערך הגדול ביותר של  $k$  שהוא אפשרי בסעיף ג (רמז: חייבים להיות לפחות 2 איברים בכל קבוצה בחלוקה).

**שאלה 5.** נגדיר את הפונקציה הבאה:  $Forder()$  אשר מריצה את אלגוריתם Inorder אבל במקום להדפיס את ערך השורש (ברקורסיה), היא מדפיסה את ערך האבא של הצמת. אם הצמת היא השורש, הפונקציה תדפיס את ערך השורש. הוכח / הפרך:

- א. בהינתן עץ חיפוש בינארי,  $Forder()$  תדפיס את האיברים בסדר מונוטוני כאשר חלק מהאיברים כפולים.
- ב. כל קודקוד בעץ יודפס פעמיים מלבד העלים והשורש.
- ג. יודפסו  $\Theta(n)$  מפתחות. אם הטענה נכונה, הוכיחו ואם לא תנו דוגמא נגדית.

**שאלה 6.** הפונקציה  $\text{del\_pointer}(T, p)$  מקבל עץ  $T$  חיפוש ומצביע לאיבר בעץ  $p$ . הפונקציה מחזירה את  $T$  ללא האיבר ש- $p$  מצביע עליו (כאשר  $T$  נשאר עץ חיפוש). הוכח / הפרד: ניתן (בעזרת  $O(n)$  מקום נוסף) לממש את  $\text{del\_pointer}$  בזמן  $O(1)$  במקרה הגרוע.

אם אתם חושבים שהטענה נכונה, הסבירו כיצד ניתן לבצע את הפונקציה, וכיצד יתבצעו הפונקציה האחרות (חיפוש, הכנסה) במידה ויש שינוי. אם אתם מפריכים את הטענה, תנו דוגמא נגדית והסבירו מהו הזמן המינימאלי שניתן לממש את הפונקציה (וכיצד).

**שאלה 7.** עץ מקולקל - מספר מועט של צמתים שלא מקיימות את דרישות החיפוש (לכל צמת  $v$  איברי תת העץ הימני גדולים ממנה ואיברי תת העץ השמאלי קטנים ממנה)

א. עליכם למצוא אלגוריתם המקבל עץ מקולקל ומחזיר רשימה של צמתים מקולקלים.

ב. עליכם למצוא אלגוריתם המקבל עץ מקולקל ומתקן אותו מבלי לשנות את טופולוגיית (מבנה) העץ.

**שאלה 8.** הראה אלגוריתם לאיחוד שתי רשימות דילוגים (skip list) בזמן  $O(n)$

**שאלה 9.**

ניח שהאלגוריתם  $f()$  הוא אלגוריתם הסתברותי המחזיר פתרון בהסתברות  $p$ , ומחזירה "נכשל" בהסתברות  $1-p$ .

נתבונן בפונקציה הבאה –  $g()$ :

(1) הרץ  $f()$  ושמור התוצאה במשתנה  $a$ .

(2) אם  $a = \text{"נכשל"}$  חזור ל(1).

(3) החזר  $a$

(כלומר – מריצים את  $f$  עד להצלחה).

מהי תוחלת זמן הריצה של הפונקציה  $g$ ? הוכח את תשובתך.

**שאלה 10.**

תהי  $f_a(x) = ax \bmod m$ . הוכיחו שהמשפחה  $H = \{f_a \mid 0 < a < m\}$  אינה משפחה אוניברסלית.