מבני נתונים 89-120
תרגיל 5

גלעד אשרוב   כינרת ברגר

14 באפריל 2011

ההגשה ביחידים. כל סטודנט נדרש לכתוב בעצמו ולבדו את הפתרון.

נא לציין שם, תעודת זהות ומספר קבוצה על גבי הפתרון!

תאריך הגשה: תרגול לאחר פסח. $27.04 - 02.05$.[1]

שאלה 1. (ממבחן + תוספת) מספרי פיבונאצ'י מוגדרים ע"י

$$F_i = F_{i-1} + F_{i-2}, \qquad F_0 = 0, F_1 = 1$$

נרצה לחשב את F_n מבלי להשתמש בנוסחא מפורשת, אלא בעזרת נוסחא רקורסיבית. כפי שכבר ראינו בתרגיל קודם - פתרון התוכנית הרקורסיבית בצורה הנאיבית - יקרה. נרצה לעשות זאת מהר יותר. לכל האורך, נניח שכל פעולת כפל, וכמו־כן - כפל של שתי מטריצות מגודל 2×2 עולה $O(1)$ זמן.

1. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. נשים לב שמתקיים: $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$.
הסק מכאן נוסחא ל - $\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}$ כפונקציה של־A, ושל $\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. כאמור, נרצה לחשב אם כן את A^k בזמן פחות מ - $O(k)$. נניח וחישבנו את A^8. האם צריך עוד - 8 פעולות של כפל מטריצות בכדי לחשב את A^{16}? הראה/י כיצד לעשות כן בפעולה אחת.
3. לפי אותו עיקרון כמו בסעיף הקודם, כמה פעולות נדרשות בכדי לחשב את A^8. הכלל לכל k, כאשר k חזקה שלמה של 2 (כלומר, הצג אלגוריתם). בנוסף, הצג נוסחא רקורסיבית לזמן הריצה, ופתור אותה (בעזרת אחת השיטות שלמדנו).
4. איך נחשב את A^5? ואת A^{12}? הכלל לחזקה k כלשהי, לא בהכרח חזקה שלמה של 2.
5. סיכום - בהינתן k - כמה עולה האלגוריתם שהצגת לחישוב F_k?
6. שיפור של האלגוריתם הקודם. נשים לב כי לכל x, ולכל $n > 0$ שלם מתקיים:

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 0 \\ x \cdot \left(x^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 & \text{if } n \text{ is odd} \\ \left(x^{\frac{n}{2}}\right)^2 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

כתוב אלגוריתם (רקורסיבי) המקבל x ומחזיר x^n. חשב סיבוכיות זמן ריצה של האלגוריתם (בעזרת נוסחת נסיגה. אפשר וצריך "לעגל פינות").

[1] **שימו לב:** התרגול של יום ראשון ב - 18:00 (קבוצה 05) מתבטל עקב יום הזיכרון לשואה ולגבורה. הסטודנטים בקבוצה זו נדרשים להגיש את התרגיל ביום ראשון בקבוצה 04.

שאלה 2. נניח שנשתמש באלגוריתם Boyer and Moore רק ב ־ Δ_1 בלי Δ_2 ונכתוב:

$$i \quad \leftarrow \quad i + \Delta_1(T(i))$$

במקום:

$$i \leftarrow i + \max(\Delta_1(T(i)), k+1)$$

בנה דוגמה של תבנית באורך 6 מעל א"ב $\{A, B, C\}$ וקטע טקסט מתאים שעבורם התוכנית תיכנס ללולאה אינסופית.

שאלה 3. בהינתן מערך ממוין A של n מספרים שונים שלמים, כאשר חלקם יכולים להיות שליליים, תאר אלגוריתם המוצא אינדקס i כך ש: $1 \leq i \leq n$ וגם $A[i] = i$. אם קיימים מספר כאלה ־ האלגוריתם יכול להחזיר אחד כלשהו מהם. אם לא קיים כזה אינדקס i, האלגוריתם צריך להחזיר ־ "לא קיים".

שאלה 4. נניח שישנה רשימה המצביעה במקום כלשהו אל תוך רשימה אחרת. כלומר, תהי:

$$L_1 = a_1 \rightarrow \ldots \rightarrow a_k \rightarrow x_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n$$

ותהי

$$L_2 = b_1 \rightarrow \ldots \rightarrow b_\ell \rightarrow x_1 \rightarrow \ldots \rightarrow x_n$$

כלומר, לשתי הרשימות יש התחלה שונה, והחל ממקום מסויים, שתיהן מתמזגות לאותה רשימה.

1. הצג אלגוריתם המקבל כקלט את הראשים של שתי הרשימות (a_1, b_1) ומחזיר את נקודת המפגש (x_1). האלגוריתם יכול לרוץ בזמן $O(|L_1| + |L_2|) = O(k + \ell + 2n)$.
2. במקרה ש k ו ־ ℓ קטנים ממש מ ־ n, האלגוריתם שהצגת בסעיף 1 הוא בזבזני. יהי $d \stackrel{\text{def}}{=} \max\{k, \ell\}$. הצג אלגוריתם הרץ בזמן $O(d^2)$. (הצג פסאדו־קוד).
3. חשוב על שיפור לאלגוריתם שהצגת בסעיף הקודם, והצג אלגוריתם שרץ בזמן $O(d)$ (שוב, יש להציג פסאדו־קוד).

שאלה 5. כתוב אלגוריתם המקבל כקלט ביטוי מתמטי, ובודק את תקינות הסוגריים. דוגמאות:

- $2 + [5 \cdot (4 + 6) + 4 \cdot (2 + 3)]$ ־ האלגוריתם יחזיר "כן".
- $2 + (5 \cdot (4 + 6) + 4 \cdot (2 + 3)]$ ־ האלגוריתם יחזיר "לא".

יש לשים לב למספר הסוגריים, וסוג הסוגריים. האלגוריתם צריך לעבוד ב ־ $O(n)$ זמן.

שאלה 6. נתון בניין בן n קומות, ונתונים k כדורי בדולח, כולם זהים. אנו מניחים כי קיימת קומה $1 \leq \ell \leq n$ כלשהי כך שאם נזרוק את הכדורים בקומה נמוכה מ ־ ℓ ־ הכדורים יישארו שלמים, אך החל מהקומה ℓ ־ הכדורים מתנפצים. כמובן שלא ניתן להשתמש בכדור שנית לאחר שהתנפץ. אתם נדרשים לתאר אלגוריתם ולנתח את זמן הריצה שלו, כאשר המטרה היא למצוא את הקומה ℓ עם מספר מינימלי של זריקות, כאשר:

$$(1) \quad k = 1 \qquad\qquad (2)\ k = 2 \qquad\qquad (3)\ k = \log n$$

שאלה 7. הכניסו את האיברים הבאים לעץ חיפוש בינארי (התחילו מעץ ריק):

$$9, 5, 7, 2, 3, 6, 11, 10, 15$$

ציירו את העץ לאחר כל הכנסה. לאחר מכן, וחפשו את האיבר 2.5 (סמנו את כל הקודקודים שעברתם עליהם במהלך החיפוש).

פסח כשר ושמח!