

מבני נתונים 89-120

תרגיל 3

גלעד אשרוב כינרת ברגר

13 במרץ 2011

ההגשה ביחידים. כל סטודנט נדרש לכתוב בעצמו ולבדו את הפתרון.

נא לציין שם, תעודת זהות ומספר קבוצה על גבי הפתרון!

תאריך הגשה: בתרגול 5 (28.03 – 23.03)

שאלה 1. הצג חסם הדוק אסימפטוטית (Θ) לנוסחאות הנסיגה הבאות (בעזרת שיטת עצי הרקורסיה):

1.

$$T(n) = T(\beta_1 \cdot n) + T(\beta_2 \cdot n) + n$$

$$T(1) = 1$$

כאשר β_1, β_2 שני קבועים גדולים מאפס המקיימים $\beta_1 + \beta_2 = 1$.

2.

$$T(n) = T(\beta_1 \cdot n) + T(\beta_2 \cdot n) + n$$

$$T(1) = 1$$

כאשר β_1, β_2 קבועים גדולים מאפס כך ש: $\beta_1 + \beta_2 < 1$.

3. בעזרת שני הפתרונות שלמעלה, הסק ("נחש") את הפתרון למקרה הכללי:

$$T(n) = T(\beta_1 \cdot n) + \dots + T(\beta_t \cdot n) + n$$

$$T(1) = 1$$

עבור כל אחד מהמקרים הבאים:

• כאשר $t, \beta_1, \dots, \beta_t$ קבועים גדולים מאפס כך ש: $\sum_{i=1}^t \beta_i = 1$.

• כאשר $t, \beta_1, \dots, \beta_t$ קבועים גדולים מאפס כך ש: $\sum_{i=1}^t \beta_i < 1$.

הוכח את שני הסעיפים בעזרת שיטת האינדוקציה.

שאלה 2. נניח מחסנית התומכת בפעולות הבאות: $push, pop, multipop$, ונניח את העלויות הבאות:

$$c(push) = 1 \quad c(pop) = 3 \quad c(multipop) = 3k$$

כאשר k הינו מספר האיברים כרגע במחסנית. מצא חסם הדוק לרצף של n פעולות, בעזרת כל אחת מהשיטות:

1. שיטת הצבירה. (יש צורך להציג הוכחה פורמלית - כפי שמופיע בדפי הסיכום של השיעור).
2. שיטת הבנק.
3. שיטת הפוטנציאל.

שאלה 3. (ממבחן)

בתרגול למדנו מערך דינאמי הגדל פי שניים בכל פעם, והתבוננו בפעולת הכנסה בלבד. בשאלה הבאה, נתייחס למערך מלא בגודל n , ונניח שבמצב ההתחלתי הוא מלא לגמרי. אנו מתבוננים רק בפעולת הוצאה (הוצאת האיבר האחרון מהמערך). לאחר רצף של פעולות, כאשר במערך נותרים $n/2$ איברים, מקצים מערך חדש בגודל $n/2$, מעתיקים את האיברים לעמך החדש, ומשחררים את המערך הישן. לסעיפים הבאים, השתמש בפונקציית הפוטנציאל הבאה: $\phi(D_i) = size - num$, כאשר $size$ הוא גודלו הנוכחי של המערך, ו num הוא מספר האיברים כרגע במערך.

1. **הוכח:** לכל $i < n$, $\phi(D_i) \geq \phi(D_0)$. הנח לשם כך שבמצב ההתחלתי D_0 - גדול המערך הוא n ויש בו בדיוק n איברים. הסק, לכל $m < n$ מתקיים: $\sum_{i=1}^m \hat{c}_i \geq \sum_{i=1}^m c_i$ (יש להראות מדוע זה מתקיים).
2. הנח סידרה של m פעולות הוצאה. הצג חסם לסדרת פעולות זו, בעזרת שיטת הפוטנציאל.

שאלה 4. בתרגול למדנו מערך דינאמי הגדל פי שניים בכל פעם, והתייחסנו לפעולת הכנסה בלבד. כעת, נתבונן במקרה בו ייתכנו פעולות הכנסה והוצאה (כאשר ההכנסה / הוצאה מתבצעת על האיבר האחרון במערך). נניח שכעת אנו במצב של מערך בגודל n . כאשר נגיע לתפוסה מלאה במערך (מספר האיברים במערך הוא n) - נקצא מערך בגודל $2n$ ונעתיק אליו את האיברים. מן הצד השני, כאשר במערך רק $n/4$ איברים, נקצא מערך חדש בגודל $n/2$, ונעתיק את הערכים למערך החדש (עלות $n/4$). מצא חסם לעלות של רצף של m פעולות, לכל $m \geq 0$. (מומלץ לבצע ניתוח לפי שיטת "הבנק", אך אין הגבלה על השיטה).

שאלה 5. הראו כיצד ניתן לממש תור ($FIFO$) בעזרת שתי מחסניות ($LIFO$), כך שהעלות לשיעורין של כל פעולה ($dequeue, enqueue$ - הכנסה, הוצאה) תהיה $O(1)$. הצג פסאדו-קוד לפעולות אלו, והצג ניתוח לשיעורין.

שאלה 6. נניח שלמונה הבינארי שהגדרנו בתרגול הוספנו גם את פעולת ה- $decrement$ (החסר 1). הוכיחו או הפריכו: העלות לשיעורין היא עדיין $O(1)$ לכל פעולה.

שאלה 7. הראו כיצד ניתן לממש מערך דינאמי (כפי שהוגדר בשיעור) כך שעלות כל הוספה תהיה $O(1)$ במקרה הגרוע. אין צורך לתמוך במחיקה.