מבני נתונים ־ תרגול 8
Splay Trees

גלעד אשרוב

5 במאי 2010

1 Splay Trees ־ סקירה כללית

במסגרת ההרצאה למדתם עצים מאוזנים, ובפרט עצי AVL. בשיעור זה נלמד עצי $splay\ trees$. עצי $splay\ trees$ הם עצי חיפוש בינאריים, והומצאו בשנת 1985 ע"י $Sleator$ ו־ $Tarjan$. ראה [1].

עץ חיפוש זה "מאזן את עצמו". בנוסף, הוא בעל תכונה מעניינת שבה האיברים האחרונים שאותם חיפשנו יימצאו בראש העץ (קרובים לשורש), ולכן חיפושם יהיה מהיר. הרעיון הוא שאיבר שחיפשנו לא מזמן ־ כנראה שנחפש אותו שוב בעתיד הקרוב, ולכן נרצה להחזיר אותו ב"מהירות".

הפעולה הבסיסית בעצי $splay\ trees$, היא הפעולה $splay$. הפעולה $splay(x, T)$ מחזירה עץ חיפוש בינארי עם אותם האיברים כמו ב ־ T כך ש־ x בשורש. אם x לא ב ־ T, בשורש יהיה y כך ש:

- או ש־ y הוא הגדול ביותר ב־ T שקטן מ ־ x (כלומר, מבין כל האיברים ב ־ T, y הוא הקודם ל ־ x).
- או ש ־ y הוא הקטן ביותר ב ־ T שגדול מ ־ x (כלומר, מבין כל האיברים ב ־ T, y הוא העוקב ל ־ x).

נשים לב ש ־ $splay$ אינה פעולת הכנסה או פעולת הוצאה; זוהי פעולה שרק משנה את צורת העץ. מימוש כל שאר הפעולות על העץ ייעשה בעזרת הפעולה $splay$:

- $member(x, T)$ ־ האם x חלק מהעץ T. בכדי לממש פעולה זו, נבצע $splay(x, T)$, אם $x \in T$, נקבל כי ־ x בשורש העץ, ולכן נחזיר "כן". אחרת ־ נחזיר ־ "לא".
- $delete(x, T)$ ־ מחק את האיבר x מ־ T. נבצע $splay(x, T)$ ונקבל חזרה T'. למעשה. נקבל עץ שבו ־ x בשורש, וקיים לנו תת עץ שמאלי T_1, ותת עץ ימני T_2. נרצה להוציא את x ואיכשהו "לאחד" את שני העצים T_1, T_2. כיצד נבצע את האיחוד כך שהעץ המתקבל יהיה עץ חיפוש בינארי?

  השלמת הפעולה ־ תרגיל. לאחר הגשת התרגיל, נעלה עדכון של קובץ זה עם הפעולה בשלמותה.
- $insert(x, T)$ ־ נכניס את x לתוך T כמו כל הכנסה בעץ חיפוש בינארי. לאחר מכן מבצעים פעולת $splay$ בכדי להעלות אותו לשורש.

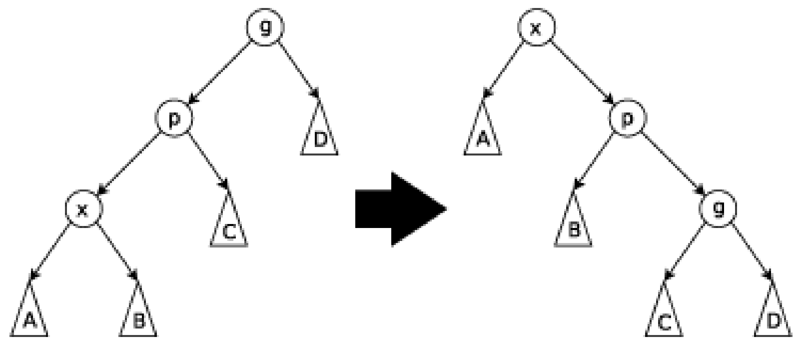
אם כן, הפעולה היחידה שנותרה לנו היא הפעולה $splay(T, x)$.

2 מימוש הפעולה $splay(T, x)$

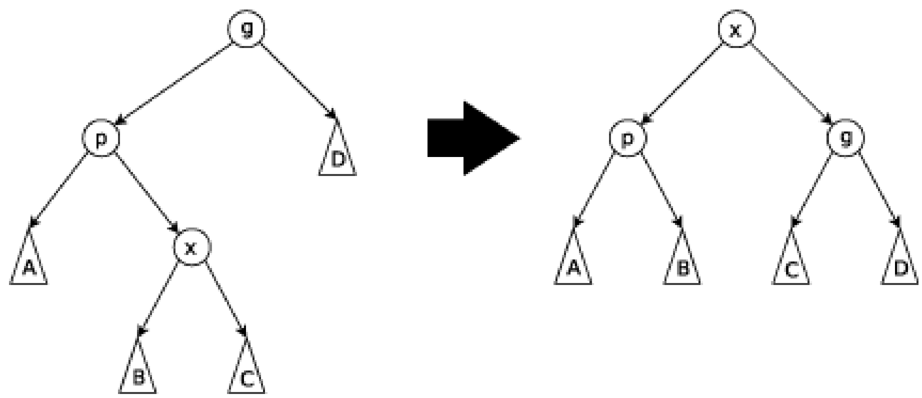
בפעולה $splay$ ־ מצאנו איבר x (או קודם או עוקב אליו), וכעת רוצים להעלות אותו לראש העץ, כלומר, להופכו לשורש. לשם כך, נעזר בשלוש פעולות $Zig - Zig$, $Zig - Zag$ ו ־ Zig. אנו מסתכלים על המסלול בין x לבין השורש, ומנתחים את צורת המסלול. אם יש לנו "ימינה ימינה" (או באופן שקול ־ "שמאלה שמאלה") ־ נבצע פעולת

$zig-zig$. אם יש לנו "שמאלה־ימינה" (או לחילופין ־ "ימינה־שמאלה") ־ נבצע פעולת $zig-zag$. כל פעולה שכזו מקפיצה את x שתי רמות לכיוון השורש, ושומרת על העץ כעץ חיפוש בינארי. מכיוון שלא מובטח ש ־ x נמצא ברמה זוגית, נבצע לבסוף פעולת zig שמעבירה אותנו רמה אחת בלבד. אם כן:

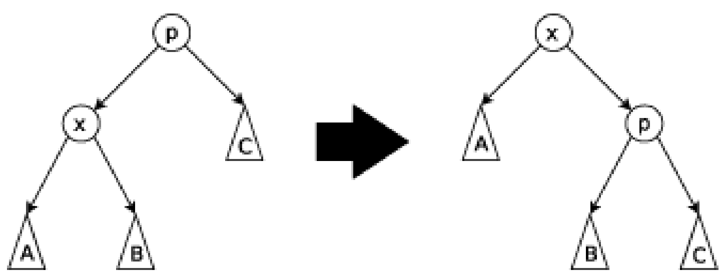
- פעולת $Zig-Zig$: בצורה זו נקפיץ את x שתי רמות למעלה.



- פעולת $Zig-Zag$: שוב, נקפיץ את x שתי רמות למעלה.



- פעולת Zig:



כעת, נרצה להראות שאם ישנם n איברים בעץ, אזי m פעולות לוקחות לכל היותר ־ $O(m\log n)$, כלומר ־ $O(\log n)$ בממוצע לכל פעולה. זהו למעשה ־ ניתוח לשיעורין. כלומר, נראה שבניתוח לשיעורין ־ פעולת $splay$ לוקחת $O(\log n)$.

3 ניתוח פעולת $splay$

ננתח בעזרת שיטת הפוטנציאל. עבור עץ T, נסמן ב - $\phi(T)$ את פונקציאת הפוטנציאל. נראה שפונקציאת הפוטנציאל תהיה מינימלית כאשר העץ פחות או יותר מאוזן. בנוסף, פונקציית הפוטנציאל תהיה גדולה כאשר העץ לא מאוזן.

לכל קודקוד w בעץ נסמן ב - $T(w)$ את תת העץ שהשורש שלו ב - w. נגדיר:

$$\begin{aligned}\mu(w) &\stackrel{\text{def}}{=} \lfloor \log T(w) \rfloor \\ \phi(T) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{w \in T} \mu(w)\end{aligned}$$

בדקו שהנכם מבינים מדוע פונקציית הפוטנציאל זו חוקית. (מהי הדרישה?).

המחיר לשיעורין של הפעולה $splay$ היא:

$$\hat{c}(splay(T,x)) = c(splay(T,x)) + \phi(T') - \phi(T)$$

כאשר אנו מסמנים ב - T' את העץ שהתקבל לאחר הפעולה $splay$.

הטענה הבאה אומרת שהמחיר של פעולת $splay$ הוא סכום העלויות לשיעורין של כל פעולת זיג־זיג, זיג־זג ו־זיג שמבצעים במהלך הפעולה $splay$. פורמלית:

טענה 1. נניח ש - $splay(T,x)$ היא סידרה של פעולות $(zig, zig-zag, zig-zig)$ - $P_1, \ldots, P_\ell$. אזי העלות לשיעורין של $splay$:

$$\hat{c}(splay(T,x)) = \sum_{i=1}^{\ell} \hat{c}(P_i)$$

הוכחה: נסמן $T = T_0$. T_i המצב של העץ לאחר הפעולה P_i. נקבל:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\ell} \hat{c}(P_i) &= \sum_{i=1}^{\ell} \left(c\left(p_i\right) + \phi\left(T_i\right) - \phi\left(T_{i-1}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} c(p_i) + \phi(T_\ell) - \phi(T_0) \\ &= c(splay(T,x)) + \phi(T') - \phi(T) = \hat{c}(splay(T,x))\end{aligned}$$

■

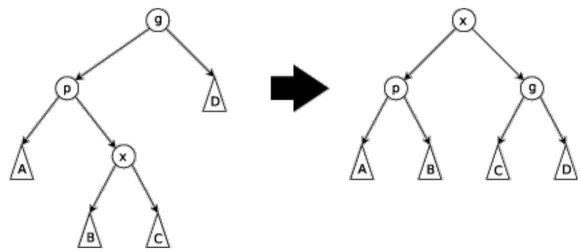
לפי הטענה, מספיק להסתכל על כמה עולה על פעולה $zig-zig$, $zig-zag$ ו - zig, ולהתבונן במספר הפעולות שישנן לנו.

נסתכל על הפעולות $zig-zig$, $zig-zag$ ו - zig. נסמן ב - $\mu(x)$ את הפוטנציאל של הקודקוד x לפני הפעולה וב - $\mu'(x)$ את הפוטנציאל של x אחרי הפעולה. בצורה דומה נסמן את הנ"ל עבור שאר הקודקודים p, g.

טענה 2. בכל תת פעולה P_i מסוג $zig-zag$ מתקיים:

$$\hat{c}(zig-zag) \le 3(\mu'(x) - \mu(x))$$

הוכחה: ניזכר בפעולה:



נזכור כי ־ $c(zig-zag)=1$. על פי האיור, ניתן לראות כי הפרש הפוטנציאלים הוא:

$$\Delta(zig-zag)=\mu'(x)+\mu'(p)+\mu'(g)-\mu(x)-\mu(p)-\mu(g)$$

(כי כל שאר העצים ־ A,B,C,D לא השתנו). נשים לב:

1. $\mu'(x)=\mu(g)$. כלומר ־ הפוטנציאל של x לאחר הפעולה הוא כמו הפוטנציאל של g לפני הפעולה. זאת מכיוון שלפני הפעולה g היה הקודקוד שכל צאצאיו הם כל הקודקודים הנידונים; לאחר הפעולה ־ x הוא הקודקוד הנ"ל.

2. $\mu(x)\leq\mu(p)$: נובע ממבנה העץ. p הוא האבא של ־ x.

3. $\mu'(x)\geq\mu'(g)$ וגם ־ $\mu'(x)\geq\mu'(p)$. זאת מכיוון ש ־ x הוא האבא של g ושל ־ p, ולכן בהכרח בעל יותר צאצאים מכל אחד מהם בנפרד.

4. $|T'(x)|\geq 2|T'(p)|$ או $|T'(x)|\geq 2|T'(g)|$.
בכדי לראות זאת, ניתן להתבונן על המינימלי מבין $|T'(g)|$ ו ־ $|T'(p)|$. נניח בלי הגבלת הכלליות ש ־ $|T'(g)|$ הוא המינימלי מבינהם. מתקיים: $|T'(g)|\leq|T'(p)|$, ולכן:

$$|T'(x)|=|T'(p)|+|T'(g)|+1\geq|T'(g)|+|T'(g)|+1\geq 2|T'(g)|.$$

המקרה השני מתקבל כאשר $T'(p)$ הוא המינימום.

ממקרה זה, כאשר נפעיל $\log$ ונעבור ל ־ μים, נקבל: $\mu'(x)\geq\mu'(p)+1$ או $\mu'(x)\geq\mu'(g)+1$.

נקבל אם כן:

$$\begin{aligned}
\Delta(zig-zag) &= \mu'(x)+\mu'(p)+\mu'(g)-\mu(x)-\mu(p)-\mu(g)\\
&\overset{(1)}{=} \mu'(p)+\mu'(g)-\mu(x)-\mu(p)\\
&\overset{(2)}{\leq} \mu'(p)+\mu'(g)-\mu(x)-\mu(x)\\
&\overset{(3)+(4)}{\leq} \mu'(x)+\mu'(x)-1-\mu(x)-\mu(x)\\
&= 2\mu'(x)-1-2\mu(x)=2(\mu'(x)-\mu(x))-1
\end{aligned}$$

הסוגריים מעל השווינים מציינים לפי איזו נקדוה השוויון נכון (ראה למעלה). לכן, העלות לשיעורין של הפעולה ־ $zig-zag$:

$$\begin{aligned}
\hat{c}(zig-zag) &= c(zig-zag)+\Delta(zig-zag)\leq 1+2(\mu'(x)-\mu(x))-1\\
&= 2(\mu'(x)-\mu(x))\leq 3(\mu'(x)-\mu(x))
\end{aligned}$$

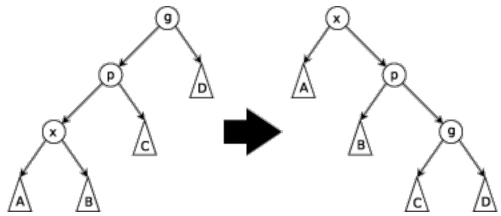
כאשר האי שיוויון האחרון נכון מכיוון ש ־ $\mu'(x)\geq\mu(x)$.

■

טענה 3. בכל תת פעולה מסוג $zig - zig$ מתקיים:

$$\hat{c}(zig - zig) \leq 3(\mu'(x) - \mu(x))$$

הוכחה: ניזכר בפעולה:



מתקיים:

$$\Delta(zig - zig) = \mu'(x) + \mu'(p) + \mu'(g) - \mu(x) - \mu(p) - \mu(g)$$

שוב, מתקיים

1. $\mu'(x) = \mu(g)$. x מכיל את כל האיברים ש־ g החזיק לפני הפעולה.
2. $\mu'(x) \geq \mu'(p)$ וגם ־ $\mu(p) > \mu(x)$. לאחר הפעולה ־ x מכיל יותר איברים מ־ p. לפני הפעולה ־ ההיפך הוא הנכון.
3. נשים לב כי ־ $|T(x)| + |T'(g)| \leq |T'(x)|$. זאת מכיוון שמתחת ל־ x ב־ T ישנם העצים A, B. מתחת g ב־ T' נמצאים העצים C, D. מתחת x ב־ T' נמצאים כל העצים הללו, פלוס שני קודקודים (g, p). אזי מתקיים:

$$\begin{aligned}
|T'(x)| &\geq |T(x)| + |T'(g)| \\
|T'(x)|^2 &\geq (|T(x)| + |T'(g)|)^2 = |T(x)|^2 + |T'(g)|^2 + 2 \cdot |T(x)| \cdot |T'(g)| \geq 2 \cdot |T(x)| \cdot |T'(g)| \\
\log |T'(x)|^2 &\geq \log \left(2 \cdot |T(x)| \cdot |T'(g)|\right) \\
2 \log |T'(x)| &\geq \log 2 + \log |T(x)| + \log |T'(g)| \\
2\mu'(x) &\geq 1 + \mu(x) + \mu'(g) \\
2\mu'(x) - 1 - \mu(x) &\geq \mu'(g)
\end{aligned}$$

אם כן, נשים הכל יחד ונקבל:

$$\begin{aligned}
\Delta(zig - zig) &= \mu'(x) + \mu'(p) + \mu'(g) - \mu(x) - \mu(p) - \mu(g) \\
&\overset{(1)}{=} \mu'(p) + \mu'(g) - \mu(x) - \mu(p) \\
&\overset{(2)}{\leq} \mu'(x) + \mu'(g) - \mu(x) - \mu(x) \\
&\overset{(3)}{\leq} \mu'(x) + (2\mu'(x) - 1 - \mu(x)) - 2 \cdot \mu(x) \\
&= 3\left(\mu'(x) - \mu(x)\right) - 1
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\hat{c}(zig-zig)=c(zig-zig)+\Delta(zig-zig)\leq 1+3\left(\mu'(x)-\mu(x)\right)-1=3\left(\mu'(x)-\mu(x)\right)$$

ולכן הטענה מתקיימת.

■

טענה 4. $\hat{c}(zig)\leq 3(\mu'(x)-\mu(x))+1$

הוכחה: ירד לעת עתה. יעלה לאחר התרגיל.

■

אנו מוכנים למשפט העיקרי של חלק זה:

משפט 5. $\hat{c}(splay(T,x))=O(\log n)$.

הוכחה: כזכור, הראינו כי - $\hat{c}(splay(T,x))=\sum_{i=1}^{\ell}\hat{c}(P_i)$. ראינו כי לכל $i<\ell$, הפעולה היא $zig-zig$ או $zig-zag$, ולכן:

$$\hat{c}(P_i)\leq 3(\mu'(x)-\mu(x))$$

בנוסף, עבור $i=\ell$, מתקיים: $\hat{c}(P_i)\leq 3(\mu'(x)-\mu(x))+1$

נשנה מעט את הנוטציות. נסמן ב - $\mu_i(x)$ את הפוטנציאל של האיבר x לאחר הפעולה ה-i, עבור $i\in\{1,\dots,\ell\}$. אם כן, הראינו כי לכל $i<\ell$

$$\hat{c}(P_i)\leq 3(\mu_i(x)-\mu_{i-1}(x))$$

וכמו כן, עבור $i=\ell$ נקבל: $\hat{c}(P_\ell)\leq 3(\mu_\ell(x)-\mu_{\ell-1}(x))+1$. נקבל אם כן כי בסה"כ:

$$\hat{c}(splay(T,x))\leq\sum_{i=1}^{\ell}\hat{c}(P_i)\leq 3(\mu_\ell(x)-\mu_0(x))+1\leq 3\mu_\ell(x)+1=3\lfloor\log|T'|\rfloor+1=O(\log n)$$

■

רשימת מקורות

[1] D. Sleator and R. E. Tarjan. Self-Adjusting Binary Search Trees, In *Journal of the ACM* , 1985, 32 (3) 652-–686. 668–676.